I Terme mit Variablen

<table>
<tr><th>Fakten – Regeln</th><th>Beispiele</th></tr>
<tr><td>Was sind Terme?

Terme sind sinnvolle Zusammenstellungen von Zahlen, Variablen, Rechenzeichen und Klammern.</td><td>- Summen: $T(b)=b+5$, $T(a,c)=2c+7a$
- Differenzen: $T(b)=2b-6$
- Produkte $T(x,y)=x\cdot y$, $T(g,k,n)=g\cdot(2k-1)\cdot(n+7)$</td></tr>
<tr><td>Zur Berechnung von Termwerten werden die Variablen mit Zahlen bzw. Größen belegt.</td><td>Beispiel: T(k) = k^2+1
Wertetabelle:
<table>
<tr><td>k</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>T(k)</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Aufstellen von Termen:
1. Überblick mithilfe von Beispielen oder einer Zeichnung verschaffen
2. Gesetzmäßigkeiten erkennen
3. Festlegen der Variablen
4. Term mithilfe der Gesetzmäßigkeit aufstellen
5. Überprüfe mittels einer Probe, ob der Term richtig sein könnte</td><td>Beispiel: Bei einer Geburtstagsgesellschaft stößt jeder Gast mit jedem anderen Gast an. Wie oft erklingen die Gläser, wenn n Gäste geladen sind?

Lösung: Jeder der n Gäste kann mit n-1 Gästen anstoßen. Da je zwei Gäste nur ein Gläserklingen erzeugen, ergibt sich $T(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$ als Anzahl für das Erklingen von Gläsern.</td></tr>
<tr><td>Was sind gleichwertige (äquivalente) Terme?

Zwei Terme, die bei jeder möglichen Ersetzung der Variablen durch Zahlen jeweils den gleichen Termwert ergeben.</td><td>- äquivalente Terme: $4ac+8ab$ und $4a(c+2b)$
- nichtäquivalente Terme: $5b+a$ und $5(b+a)$</td></tr>
</table>

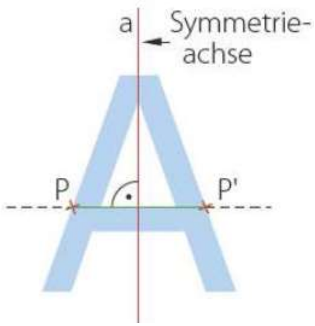
II Umformen von Termen	
Fakten - Regeln	*Beispiele*
Umformungen nach den gültigen Rechengesetzen (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, Klammerregeln laut Jgst. 5)	
Klammern auflösen Steht ein *Plus* vor der Klammer, kann man die Klammer ohne weiteres weglassen. Steht ein *Minus* vor der Klammer, lässt man die Klammer weg und kehrt gleichzeitig alle Rechenzeichen in der Klammer um.	$x + (y^2 - 2x) + y^2 = x + y^2 - 2x + y^2$ $x - (y^2 - 2x) + y^2 = x - y^2 + 2x + y^2$
Summen werden vereinfacht, indem man gleichartige Summanden zusammenfasst.	$x - y^2 + 2x + y^2 = x + 2x - y^2 + y^2 = 3x$
Summe von Produkten Hier werden zunächst die einzelnen Produkte vereinfacht. Dann werden die Summanden, in denen die gleichen Variablen mit jeweils derselben Potenz vorkommen, zusammengefasst.	$3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 - 4y^2$ $= 3x^2 + 7y^3 - 25x^2 - 4y^2$ $= -22x^2 + 7y^3 - 4y^2$
Zwei Summen werden multipliziert indem man jeden Summanden der ersten Klammer jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) und die Produkte addiert: $(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$	$(2x + 3y) \cdot (3 - 4x)$ $= 2x \cdot 3 + 2x \cdot (-4x) + 3y \cdot 3 + 3y \cdot (-4x)$ $= 6x - 8x^2 + 9y - 12xy$
Binomische Formeln Plusformel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Minusformel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Plusminusformel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$ $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$ $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

III Symmetrie von Figuren

Fakten - Regeln	*Beispiele*

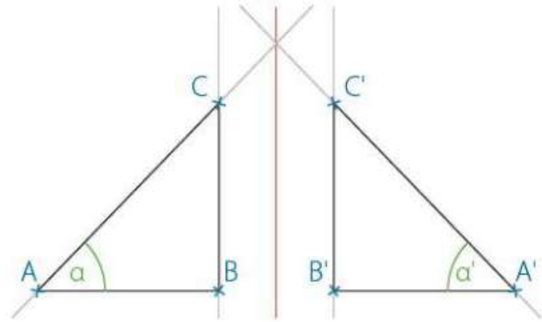
Achsensymmetrie

Zu jedem Punkt P gehört ein zu P achsensymmetriescher Punkt P´. Die Verbindungslinie $\overline{PP'}$ wird von der Symmetrieachse senkrecht halbiert. P und P´ haben von der Symmetrieachse somit den gleichen Abstand.



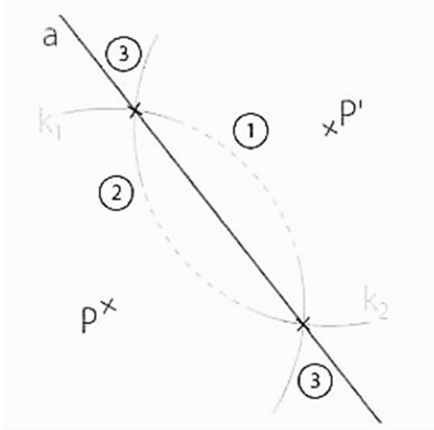
Eigenschaften der Achsensymmetrie

- Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß.
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.
- Zueinander symmetrische Geraden sind parallel oder sie schneiden sich auf der Achse.



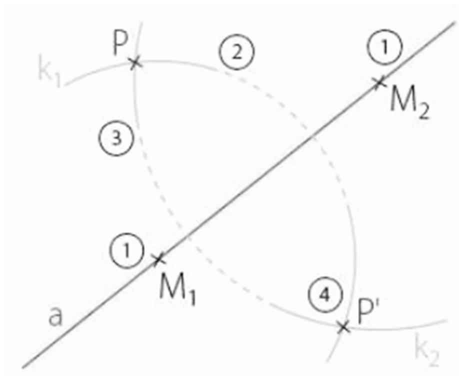
Konstruktion des achsensymmetrischen Punktes P´, wenn der Punkt P und die Symmetrieachse a gegeben sind:

1. Wähle auf der Symmetrieachse a zwei Punkte M_1 und M_2.
2. Zeichne einen Kreis k_1 um M_1 durch P.
3. Zeichne einen Kreis k_2 um M_2 durch P.
4. P´ ist der Schnittpunkt der Kreise k_1 und k_2.



Konstruktion der Symmetrieachse a, wenn die Punkte P und P´ gegeben sind:

1. Zeichne einen Kreis k_1 um P mit genügend großem Radius.
2. Zeichne einen Kreis k_2 um P´ mit dem gleichen Radius.
3. Die Symmetrieachse a verläuft durch die Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2.

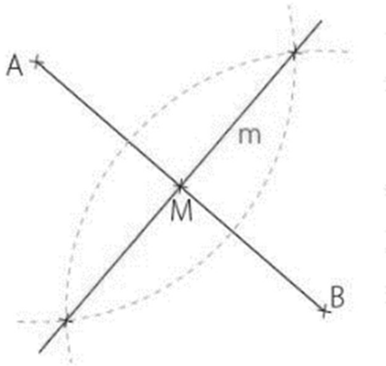


Grundkonstruktionen

Mittelsenkrechte

Die Mittelsenkrechte m einer Strecke $\overline{AB}$ verläuft senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ und halbiert diese. Sie ist Symmetrieachse zu den Punkten A und B.

Um die Mittelsenkrechte einer Strecke zu konstruieren, muss man nur die Symmetrieachse zu den zwei Endpunkten konstruieren.



Lot

Ein Lot l verläuft senkrecht zu einer Geraden oder Strecke.

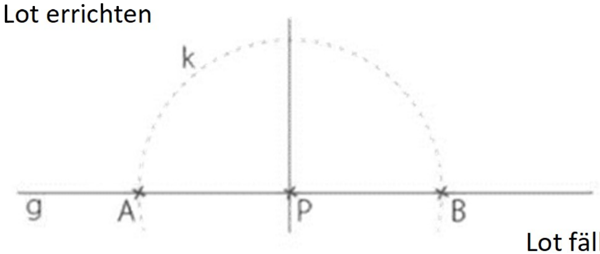
Fall 1: **Lot errichten** – P liegt auf der Geraden g

1. Zeichne einen Kreis k um P mit beliebigem Radius, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet.
2. Konstruiere die Symmetrieachse zu A und B. Diese stellt das Lot dar.

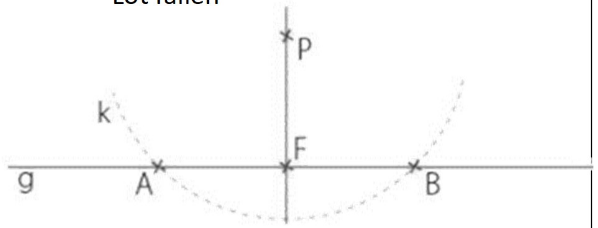
Fall 2: **Lot fällen** – P liegt nicht auf der Geraden g

1. Zeichne einen Kreis k um P mit einem genügend großen Radius, sodass diese die Gerade g in A und B schneidet.
2. Konstruiere die Symmetrieachse zu A und B. Diese stellt das Lot dar.

Lot errichten



Lot fällen

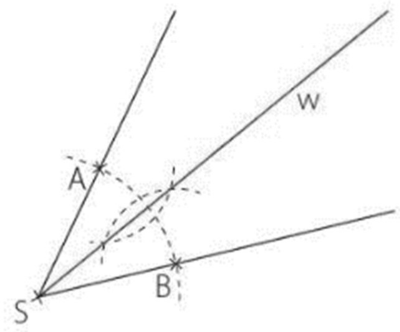


Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende w eines Winkels α verläuft durch den Scheitel S des Winkels und teil den Winkel in zwei gleich große Teile.

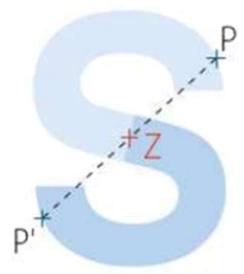
Konstruktion:

1. Zeichne einen Kreis um den Scheitel S, um zwei gleich weit entfernte Punkte A und B zu erhalten.
2. Konstruiere die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Diese ist die Winkelhalbierende.



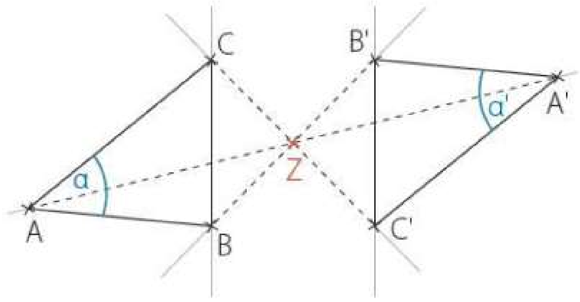
Punktsymmetrie

Zu jedem Punkt P gehört ein zu P punktsymmetrischer Punkt P´. Die Verbindungslinie $\overline{PP'}$ wird vom Symmetriezentrum Z halbiert. P und P´ haben von Symmetriezentrum den gleichen Abstand.



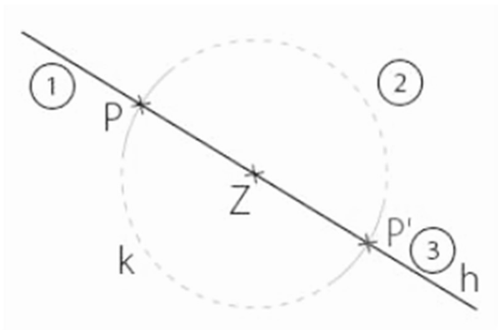
Eigenschaften der Punktsymmetrie:

- Zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang und parallel.
- Zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß.
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich nicht.



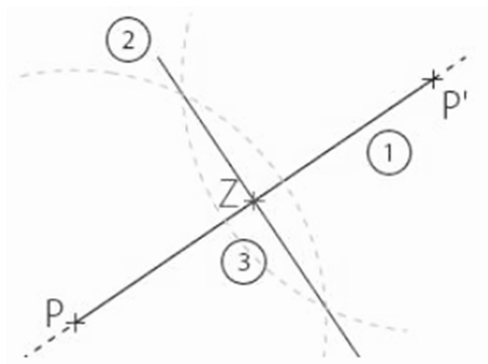
Konstruktion des punktsymmetrischen Punktes P´, wenn der Punkt P und das Symmetriezentrum Z gegeben sind:

1. Zeichne die Gerade h durch die Punkte P und Z.
2. Zeichne einen Kreis k um Z mit dem Radius $|\overline{PZ}|$.
3. P´ ist der Schnittpunkt des Kreises k und der Geraden h.



Konstruktion des Symmetriezentrums Z, wenn die Punkte P und P´ gegeben sind:

1. Zeichne die Strecke $\overline{PP'}$.
2. Konstruiere die Symmetrieachse zu den Punkten P und P´.
3. Z ist der Schnittpunkt der Strecke $\overline{PP'}$ und der Symmetrieachse zu P und P´.



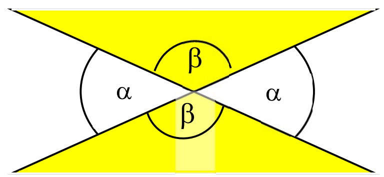
IV Winkelbetrachtungen

Fakten - Regeln	*Beispiele*

Zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, nennt man eine **Geradenkreuzung**.

Einfache Geradenkreuzung:

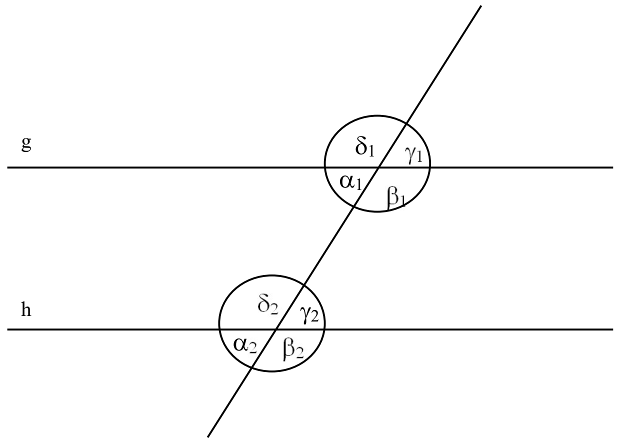
- **Nebenwinkel**:
  - Nebeneinander liegende Winkel.
  - Sie ergänzen sich zu 180^0.
- **Scheitelwinkel**:
  - Gegenüberliegende Winkel.
  - Sie sind gleich groß.



Doppelkreuzung:

- **Stufenwinkel** (F-Winkel): Gleichliegende Winkelpaare, wie α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 sowie δ_1 und δ_2.
- **Wechselwinkel** (Z-Winkel): Wechselseitig liegende Winkelpaare, wie α_1 und γ_2, β_1 und δ_2, γ_1 und α_2 sowie δ_1 und β_2.

Stufen- und Wechselwinkel sind genau dann **gleich groß**, wenn die **Geraden g und h parallel** sind.



Winkelsummen

Die Summe der (Innen-)Winkel ergibt in jedem **Dreieck 180˚**, in jedem **Viereck 360°.**

In einem **n-Eck beträgt** die Innenwinkelsumme **(n-2) · 180°**.

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Zwei Terme, die mit einem Gleichheitszeichen verbunden sind, bilden eine **Gleichung**. Zahlen, die beim Einsetzen in die Variable eine wahre Aussage ergeben, sind **Lösungen der Gleichung**. Umformungen, bei denen sich die Lösung einer Gleichung nicht verändert, heißen **Äquivalenzumformungen**. Äquivalenzumformungen sind: - Addieren/Subtrahieren derselben Zahl auf beiden Seiten. - Addieren/Subtrahieren desselben Vielfachen von x auf beiden Seiten. - Multiplizieren beider Seiten der Gleichung mit derselben Zahl ungleich Null. - Dividieren beider Seiten der Gleichung durch dieselben Zahl ungleich Null. Alle Lösungen einer Gleichung werden in der **Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$** zusammengefasst. Ergibt sich beim Umformen der Gleichung eine - falsche Aussage, dann ist die Gleichung **unlösbar**. Für die Lösungsmenge gilt: $\boldsymbol{L} = \{\,\}$. - wahre Aussage, dann ist die Gleichung **allgemein** gültig. Für die Lösungsmenge gilt: $\boldsymbol{L} = \mathbb{Q}$.	$6x+3 = 11+2x \quad \vert -2x$ $6x+3-2x = 11+2x-2x$ $4x+3 = 11 \vert -3$ $4x+3-3 = 11-3$ $4x = 8 \vert :4$ $x = 2$ $L = \{2\}$

VI Prozentrechnung und Daten

Fakten - Regeln	*Beispiele*

Grundbegriffe

Grundwert (GW): das Ganze entspricht 100 %

Prozentwert (PW): der Bruchteil

Prozentsatz (PS): der Anteil

Prozentrechnungen

Grundgleichung der Prozentrechnung: **PS · GW = PW**

Alternativ: Geeignete Dreisatzrechnung durchführen.

Frisch geerntete Kartoffeln enthalten 78% Wasser.
Wie viel kg Kartoffeln enthalten etwa 1 l (=1 kg) Wasser?

$$0{,}78 \cdot x = 1kg \qquad x = 1kg : 0{,}78 \qquad x \approx 1{,}28kg$$

Daten darstellen und auswerten

Das **arithmetische Mittel $\bar{m}$** gibt den Durchschnittswert aller Werte an.

Die **Spannweite R** gibt die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert an.

Der **Median M** ist der Wert, der in der Mitte eines sortierten Datensatzes steht. Bei einer geraden Anzahl von Daten muss das arithmetische Mittel aus den beiden in der Mitte stehenden Werten gebildet werden.

Quartile unterteilen den sortierten Datensatz in vier gleich große Teile.

Das **untere Quartil $q_{\frac{1}{4}}$** und das **obere Quartil $q_{\frac{3}{4}}$** sind die Mediane der unteren und der oberen Hälfte.

Ein **Boxplot** ist ein Diagramm, das die Verteilung von Daten zwischen dem kleinsten Wert (Minimum) und dem größten Wert (Maximum) veranschaulicht.

Beispiel: Taschengeld (TG) von Schülern einer 7. Klasse:

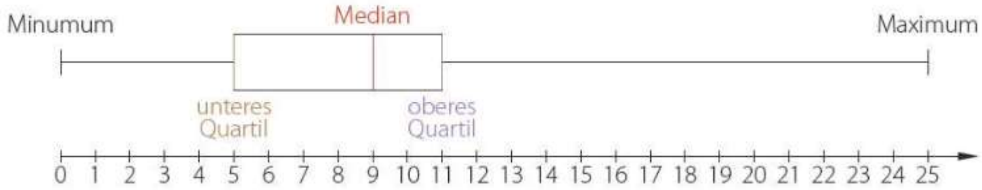
TG in €	0	3	5	7	9	10	11	12	15	25
Anzahl	1	2	3	2	1	3	2	1	1	1

$$\bar{m} = \frac{0\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 + 7\cdot 2 + 9\cdot 1 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1 + 15\cdot 1 + 25\cdot 1}{17} \approx 8{,}71$$

Spannweite $R = 25 - 0 = 25$

Median $M = 9$

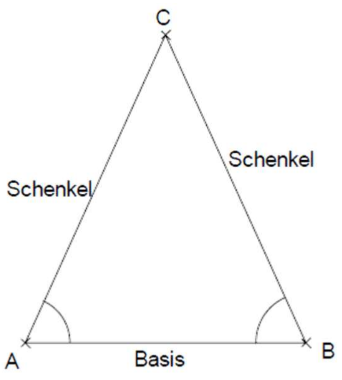
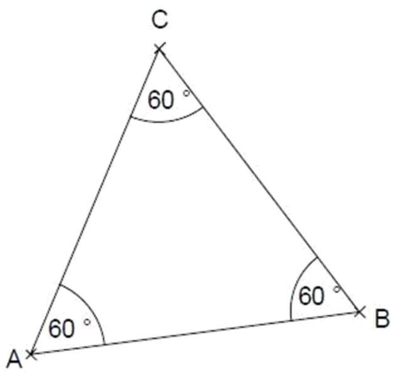
Unteres Quartil $q_{\frac{1}{4}} = 5$ Oberes Quartil $q_{\frac{3}{4}} = 11$



VII Kongruente Dreiecke

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen deckungsgleich oder **kongruent.** Sind zwei Figuren F und G **kongruent**, so schreibt man kurz: $\boldsymbol{F \cong G}$ In kongruenten Figuren sind einander entsprechende Winkel gleich groß und entsprechende Seiten gleich lang. **Kongruenzsätze für Dreiecke:** Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie - in allen drei Seiten übereinstimmen (**SSS-Satz**). - in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW-Satz** bzw. **SWW-Satz**). - in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(SWS-Satz**). - in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW-Satz**).	

VIII Besondere Dreiecke

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Das gleichschenklige Dreieck Ein Dreieck mit **zwei gleich langen Seiten (Schenkel)** heißt gleichschenkliges Dreieck. Die dritte Seite heißt **Basis**. Jede der folgenden Aussagen ist gleichwertig: - Das Dreieck ist gleichschenklig. - Das Dreieck ist achsensymmetrisch. - Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel (**Basiswinkel**). **Das gleichseitige Dreieck** Ein Dreieck mit **drei gleich langen** Seiten heißt gleichseitiges Dreieck. Seine Winkel betragen **jeweils 60⁰**.	 

Das rechtwinklige Dreieck

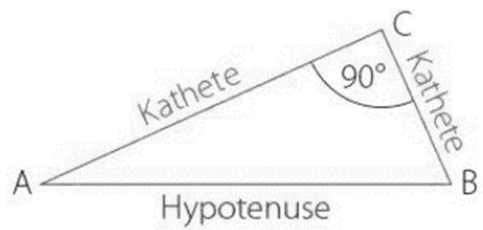
Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges Dreieck**. Die **Hypotenuse** ist immer die längste Seite und liegt dem rechten Winkel gegenüber. Die Schenkel des rechten Winkels heißen **Katheten**.

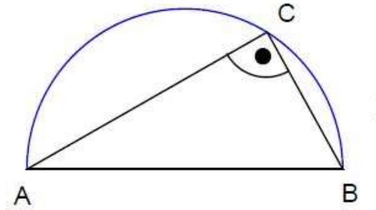
Satz des Thales und seine Umkehrung:

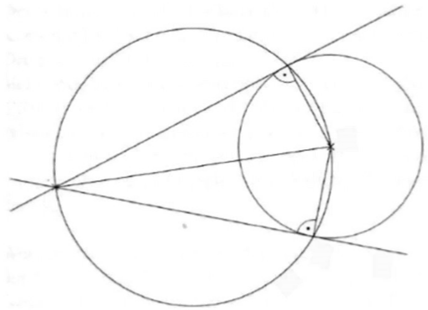
Wenn in einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel. Umgekehrt gilt aber auch: Wenn ein Dreieck bei C einen rechten Winkel hat, dann leigt der Punkt C auf dem Kreis mit dem Druchemesser $\overline{AB}$.

Tangentenkonstruktion zu einem gegebenen Kreis mit Mittelpunkt M durch einen Punkt P außerhalb des Kreises:

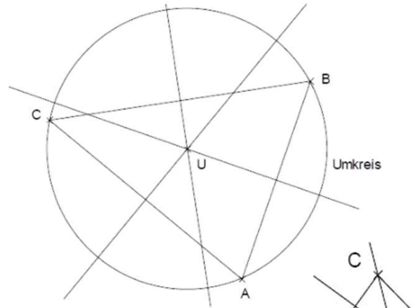
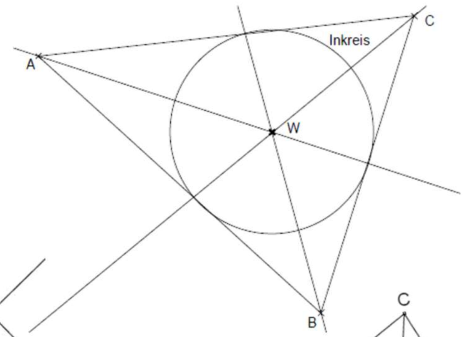
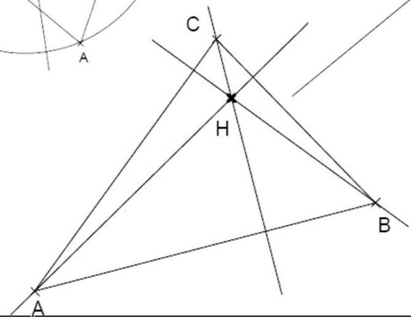
1. Zeichne $\overline{PM}$.
2. Zeichne den Thaleskreis über $\overline{PM}$.
3. Markiere die Schnittpunkte B_1 und B_2 des gegebenen Kreises mit dem Thaleskreis.
4. Zeichne die Geraden PB_1 und PB_2. Es entstehen zwei Tangenten an den Kreis.







IX Konstruktionen

Fakten - Regeln	*Beispiele*
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt U. U ist der Mittelpunkt des **Umkreises** des Dreiecks.	
In jedem Dreieck schneien sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt W. W ist der Mittelpunkt des **Inkreises** des Dreiecks.	
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen oder ihre Verlängerungen im **Höhenschnittpunkt H**.	
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden im Schwerpunkt S.