Lerninhalte	Fakten-Regeln-Beispiele

Proportionalität

Gehört bei einer Zuordnung zum r-fachen der einen Größe das r-fache der anderen Größe, so spricht man von einer **proportionalen Zuordnung**.

Beispiel:

x	3	6	9	12
y	9	18	27	36

Die folgenden Zahlenpaare sind **quotientengleich**: {(3|9);(6|18);(9|27);(12|36)} Es gilt nämlich: $\frac{9}{3}=\frac{18}{6}=\frac{27}{9}=\frac{36}{12}=3$

Allgemeine Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto m \cdot x$ m ist der **Proportionalitätsfaktor**. Die Punkte des Graphen liegen auf einer Ursprungsgeraden.

Gehört bei einer Zuordnung zum r-fachen der einen Größe das $\frac{1}{r}$-fache der anderen Größe, so spricht man von einer **umgekehrt proportionalen Zuordnung**.

Beispiel:

x	32	16	8	4
y	16	32	64	128

Die folgenden Zahlenpaare sind **produktgleich**: {(32|16);(16|32);(8|64);(4|128)} Es gilt nämlich: $32 \cdot 16 = 16 \cdot 32 = 8 \cdot 64 = 4 \cdot 128 = 512 = p$

Allgemeine Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto \frac{p}{x}$ Die Punkte des Graphen liegen auf einer **Hyperbel**.

Funktionen

Eine Zuordnung, die jedem Wert für x jeweils nur einen einzigen Wert für y zuordnet, heißt **Funktion**.

Beispiel:
Gefahrene Strecke $\mapsto$ Benzinverbrauch
Gegenbeispiel:
Benzinverbrauch $\mapsto$ gefahrene Strecke

Jeder Term $f(x)$ legt eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ fest.

Die Menge aller Zahlen, für die ein Funktionswert berechnet werden soll, heißt **Definitionsmenge** D_f**.** Die größtmögliche Definitionsmenge heißt **maximale Definitionsmenge** $D_{\max}$. Diejenigen Elemente aus D_f**,** für die der Funktionswert Null ergibt, heißen **Nullstellen** von f**.**

Beispiele: a) $U : r \mapsto 2\pi \cdot r$ (Kreisumfang) b) $A : r \mapsto \pi \cdot r^2$ (Kreisfläche)

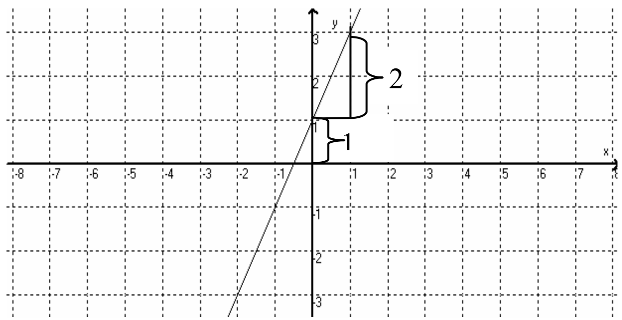
c) $f : x \mapsto 5 - \frac{1}{x+2}$ $D_{\max} = Q \setminus \{-2\}$ Nullstelle: $f(x) = 0$; $5 - \frac{1}{x+2} = 0$; $5 = \frac{1}{x+2}$; $\frac{1}{5} = x + 2$; $x = -1{,}8$

Lineare Funktionen

Eine Funktion $f: x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in Q$ heißt **lineare** Funktion.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Zahl m gibt die Steigung, die Zahl, t den y-Achsenabschnitt des Graphen an.

Beispiel: $f: x \mapsto 2x + 1$



Typische Aufgabe: Bestimme den Funktionsterm der Geraden, die durch die Punkte Q(5|6) und P(2|4) verläuft.

Lösung: Berechnung des Steigungsfaktors: $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{6-4}{5-2} = \frac{2}{3}$

P(2|4) in $y = \frac{2}{3} \cdot x + t$ eingesetzt: $4 = \frac{2}{3} \cdot 2 + t \Rightarrow t = \frac{8}{3}$, also: $g: x \mapsto \frac{2}{3} \cdot x + \frac{8}{3}$

Wichtige Äquivalenzumformungen bei linearen Ungleichungen:

-alle Termumformungen
-beidseitige Addition oder Subtraktion einer Zahl oder eines Terms
-beidseitige Multiplikation oder Division mit einer positiven Zahl
-beidseitige Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl, wenn zugleich das Ungleichungszeichen umgekehrt wird.

Beispiel:

$$4 \cdot (-x + 2) < x - 3$$
$$-4x + 8 < x - 3$$
$$-5x + 8 < -3$$
$$-5x < -11$$
$$5x > 11$$
$$x > \frac{11}{5}$$

lineare Gleichungs-systeme

Beispiel:

(I) $x+2y=8$ Ein Zahlenpaar heißt Lösung, falls das Paar **jede Gleichung** des Systems erfüllt.

(II) $3x-4y=4$ Jede Gleichung des Systems kann interpretiert werden als Gleichung einer Geraden.

Lösungsverhalten:

Anzahl der Lösungen	Geom. Deutung
eine Lösung	Die Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
Keine Lösung	Die Geraden sind parallel.
Unendlich viele Lösungen	Die Geraden sind identisch.

Lösungsverfahren:

a) Einsetzungsverfahren:
Wähle eine Gleichung aus und löse sie nach einer Variablen auf.
Setze diese Gleichung in die andere ein.

Beispiel:

(I)	$x+2y=8$
(II)	$3x-4y=4$
(I)	$x=8-2y$
(I) in (II)	$3\cdot(8-2y)-4y=4$
(II)	$y=2$
(II) in (I)	$x=8-2\cdot 2$
(I)	$x=4$

$L=\{(4\mid 2)\}$

b) Additions – bzw. Subtraktionsverfahren

Beispiel:

(I)	$x+2y=8$
(II)	$3x-4y=4$
-3(I)	$-3x-6y=-24$
(II)	$3x-4y=4$
-3(I)+(II)	$-10y=-20$
(III)	$y=2$
(III)in (I)	$x+2\cdot 2=8$
(I)	$x=4$

$L=\{(4\mid 2)\}$

Weiteres Verfahren :

Gleichsetzungsverfahren: Man löst beide Gleichungen nach einer Variablen auf (z.B. nach x) und setzt sie gleich. So entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen (z.B. y). Diese wird gelöst und das Ergebnis anschließend in eine der beiden, z.B in die nach x aufgelöste Gleichung, eingesetzt.

Bemerkung: Die oben vorgestellten Verfahren sind leicht auf drei lineare Gleichungen mit drei Variablen übertragbar.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge** Ω.

Jede Teilmenge der Ergebnismenge heißt **Ereignis**.

Beispiele:

Zweimaliger Wurf einer Münze: $\Omega = \{(K,K);(K,Z);(Z,K);(Z,Z)\}$

Einmaliger Wurf eines Würfels: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

A: Augenzahl ist gerade $A=\{2;4;6\}$

B: Augenzahl ist durch 7 teilbar $B=\{\}$

Jedem Ereignis A wird eine **Wahrscheinlichkeit P(A)** zwischen null und eins zugeordnet.
Zufallsexoerimente, bei denen alle Ergebnusse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**.

Laplace Experiment:
Bei einer Lotterie gibt es 50 von 1 bis 50 nummerierte Lose. Es wird einmal blind hineingegriffen.
Nicht-Laplace-Experiment:
Man wirft eine Streichholzschachtel und interessiert sich dafür, welche Seite oben liegt.

Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim Samstags-Lotto „6 aus 49“ die erste gezogene Zahl gerade?

Lösung: Es gibt 49 mögliche Ergebnisse, also gilt $|\Omega|=49$

Außerdem beträgt die Anzahl der geraden Zahlen zwischen 1 und 49: $\frac{49-1}{2} = 24$

Somit gilt: $P(A) = \frac{24}{49} \approx 0,49$

Zählprinzip:

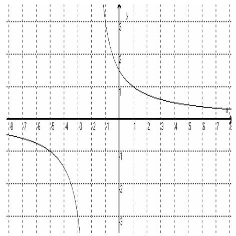
Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit $m_1;m_2;...;m_k$ Elementen je ein Element , so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ Möglichkeiten.

Es stehen 8 Stühle nebeneinander. 6 Personen nehmen Platz.
Wie viele Sitzordnungen sind möglich?

Lösung: Für die erste Person gibt es 8 Möglickkeiten.

Für die zweite Person gibt es 7 Möglickkeiten.

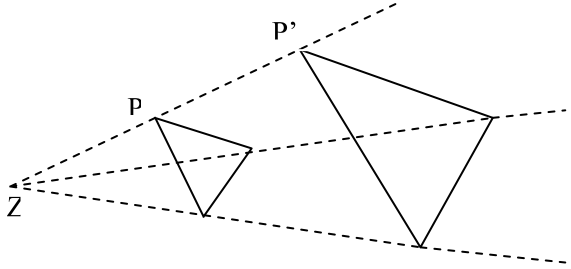
usw.
Für die sechste Person gibt es 3 Möglickkeiten
Also gibt es insgesamt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$ Möglichkeiten .

Gebrochen rationale Funktionen	Was sind gebrochen rationale Funktionen? Das sind Funktionen, deren Term ein Bruchterm ist. Was ist die Definitionsmenge einer gebrochen rationalen Funktion? Sie enthält diejenigen Elemente, für die der Nenner nicht Null ist.	Beispiele: $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad g: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ $\quad h: x \mapsto \frac{2-x}{x^2-1}$ Q \ {0} Q \ {-2} Q \ {-1;+1} Der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ 
	Wie bestimmt man die senkrechten Asymptoten? Man bestimmt sämtliche Nullstellen des Nenners, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind.	$f: x \mapsto \frac{1-x}{(x+2)(x^2-1)}$ Nennernullstellen: $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$ Zählernullstelle: $x_2 = 1$ senkrechte Asymptoten: $x = -2,\ x = -1$
	Wie geht man beim Rechnen mit Bruchtermen vor? Es gelten die Regeln für das Bruchrechnen.	Beispiele: a) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} = \frac{2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)} - \frac{3\cdot x}{(x-1)\cdot x} = \frac{2\cdot(x-1)-3x}{x\cdot(x-1)} = \frac{-2-x}{x\cdot(x-1)}$ b) $\frac{2x}{x-1} : \frac{3x}{1-x} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{3x} = \frac{2x\cdot(1-x)}{(x-1)\cdot 3x} = \frac{(-1)\cdot 2x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot 3x} = -\frac{2}{3}$
	Was bedeuten negative Exponenten? $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n \in N_0;\ a \neq 0$	Beispiel: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

	Nenne die Schritte zur Lösung einer Bruchgleichung. a) Bilde den Hauptnenner. (=kgV der Einzelnenner) b) Multipliziere die Gleichung mit dem Hauptnenner. c) Löse die entstandene bruchfreie Gleichung. d) Führe die Probe durch.	Beispiel: $\frac{3}{2-x} = \frac{x}{2x-4}$ Zu a) $\left.\begin{array}{l} 2-x \text{ nicht weiter zerlegbar} \\ 2x-4 = -2\cdot(2-x) \end{array}\right\}$ HN: -2 (2-x) Zu b) $\frac{3\cdot(-2)\cdot(2-x)}{(2-x)\cdot 1} = \frac{x\cdot(-2)\cdot(2-x)}{(-2)\cdot(2-x)}$ Zu c) $3\cdot(-2) = x$ bzw. $x = -6$ Zu d) linke Seite: $\frac{3}{2-(-6)} = \frac{3}{8}$ rechte Seite: $\frac{-6}{2\cdot(-6)-4} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

Ähnlichkeit

Zentrische Streckung: $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$



Zwei Figuren heißen zu einander **ähnlich**, wenn sie durch eine zentrische Streckung aus einander hervorgehen.
Für ähnliche Figuren gilt:

- entsprechende Strecken haben das gleiche Längenverhältnis
- entsprechende Winkel sind gleich groß
- sind die Seitenlängen einer Figur G k-mal so lang wie die von der Figur F, so ist der Flächeninhalt von G k^2 - mal so groß wie der von F.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:
Dreiecke sind bereits dann ähnlich,

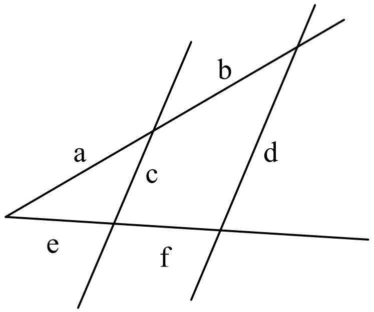
- wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen,

oder

- wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.

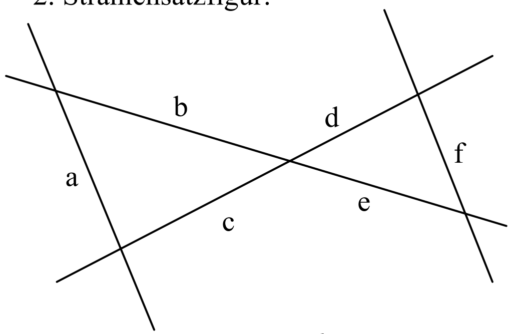
Der Strahlensatz:

1. Strahlensatzfigur:



$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{e+f}$$

2. Strahlensatzfigur:



$$\frac{a}{f} = \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$$