I Natürliche und ganze Zahlen

Fakten - Regeln	Beispiele

Das Dezimalsystem:

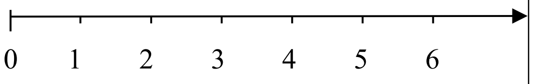
…	H Z E	H Z E	H Z E	H Z E	H Z E
…	Billionen	Milliarden	Millionen	Tausender	

7 150 321 014 = „sieben Milliarden hundertfünfzig Millionen dreihunderteinundzwanzigtausendundvierzehn“

Runden:
Beim Runden auf Zehner, Hunderter, Tausender, … betrachtet man die rechts von dieser Stelle stehende Ziffer.
Ist diese Ziffer 0,1, 2, 3, 4, so wird abgerundet. Ist diese Ziffer 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet.

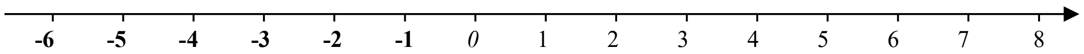
Runde 6 764 auf Zehner: $6\,764 \approx 6\,760$
Runde 6 764 auf Hunderter: $6\,764 \approx 6\,800$
Runde 6 764 auf Tausender: $6\,764 \approx 7\,000$
Runde 4 999 auf Zehntausender: $4\,999 \approx 0$

Zahlenmengen:
Menge der …**Quadratzahlen:** {1;4; 9; 16; 25; … }
… **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$
Wir verwenden sie zum Zählen und Ordnen (< kleiner als, > größer als).
… **natürlichen Zahlen mit Null:** $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
Der Zahlenstrahl dient zur Veranschaulichung der natürlichen Zahlen:



$-3 \notin \mathbb{N}$ ⇐ „-3 ist nicht Element der Menge $\mathbb{N}$“
$2 < 10$ $10 > 2$
$0 \in \mathbb{N}_0$; $-3 \notin \mathbb{N}_0$

… **ganzen Zahlen:** $\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
Veranschaulichung an der Zahlengeraden:



negative Zahlen positive Zahlen

$-12 \in \mathbb{Z}$

Der **Betrag** einer ganzen Zahl ist definiert als Abstand dieser Zahl auf der Zahlengeraden von der 0.
Die **Gegenzahl einer Zahl** ist die auf der Zahlengerade symmetrisch liegende Zahl.

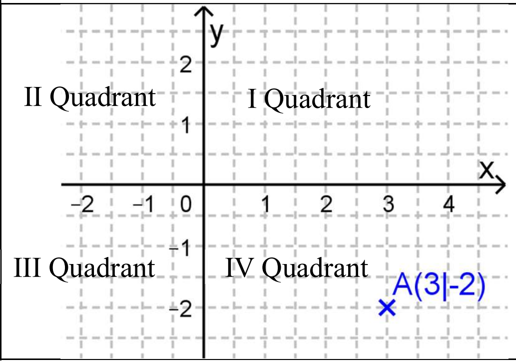
$|+3| = 3$ $|-3| = 3$ $|0| = 0$
Die Gegenzahl von -6 ist 6. Die Gegenzahl von 8 ist -8.

Teilbarkeit:
Eine Zahl ist nur dann (ohne Rest) teilbar durch …
… 2, wenn ihre Einerziffer eine 0;2; 4; 6; oder 8 ist.
… 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
… 4, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
… 5, wenn ihre Einerziffer eine 0 oder 5 ist.
… 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
… 10, wenn ihre Einerziffer eine 0 ist.
Primzahl: Eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler besitzt. $\mathbb{P} = \{2; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19; \dots\}$
Primfaktorzerlegung: Jede natürliche Zahl lässt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig in ein Produkt von Primzahlen zerlegen.

$9 \notin \mathbb{P}$, da 9 durch 1; 3 und 9 teilbar ist
$60 = 10 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Koordinatensystem:

Jeder Punkt im Koordinatensystem lässt sich durch ein Zahlenpaar beschreiben. Die Zahlen heißen Koordinaten des Punktes.



II Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

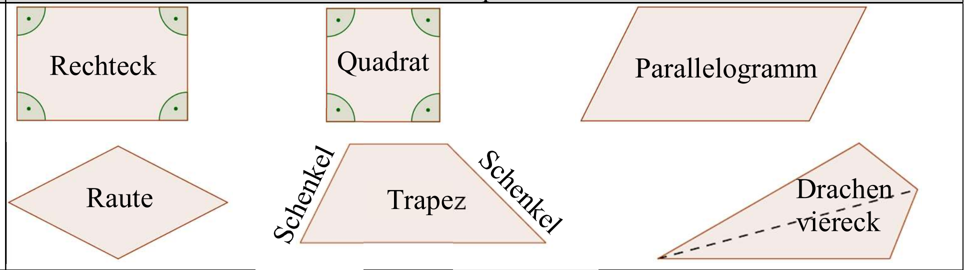
Fakten - Regeln	Beispiele
Begriffe: $\overbrace{\underset{\text{1. Summand}}{2} + \underset{\text{2. Summand}}{4}}^{\text{Summe}} = \underset{\text{Wert der Summe}}{6}$ $\qquad$ $\overbrace{\underset{\text{Minuend}}{5} - \underset{\text{Subtrahend}}{3}}^{\text{Differenz}} = \underset{\text{Wert der Differenz}}{2}$	
Terme: Ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen und evtl. aus Klammern besteht, nennt man Term. Die zuletzt auszuführende Rechenart legt die Art des Terms fest.	$(32 - 15) - [4 + (23 - 17)]$ Art des Terms: Differenz
Addieren: **Subtrahieren:**	$(+4) + (+13) = (+4) + 13 = +17$ $(-4) + (-13) = (-4) - 13 = -17$ $(-4) - (+13) = (-4) - 13 = -17$ $(+4) - (-13) = (+4) + 13 = +17$
Rechengesetze: **Kommutativgesetz der Addition** (KG_+)**:** Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: $a + b = b + a$ **Assoziativgesetz der Addition** (AG_+)**:** Für alle ganzen Zahlen a; b; c gilt: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ Terme, in denen nur Strichrechnungen vorkommen, können stets als Summen aufgefasst werden. ⇒ Häufig ist es geschickt, zunächst alle negativen Zahlen und alle positiven Zahlen zu addieren. ⇒ **Vorfahrtsregeln: Termwerte bei Strichrechnungen** 1. Klammern zuerst (von innen nach außen) 2. Von links nach rechts	$17 + 51 + 83 \overset{KG_+}{=} 17 + 83 + 51 = 100 + 51 = 151$ $(27 + 47) + 53 \overset{AG_+}{=} 27 + (47 + 53) = 27 + 100 = 127$ $17 - 25 + 83 - 12 - 33$ $= 17 + (-25) + 83 + (-12) + (-33)$ KG_+ $= 17 + 83 + (-25) + (-12) + (-33)$ AG_+ $= (17 + 83) + \big((-25) + (-12) + (-33)\big)$ $= (100) + (-25 - 12 - 33)$ $= (100) + (-70)$ $= 30$

III Geometrische Figuren und Lagebeziehungen

Fakten - Regeln	Beispiele

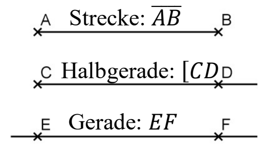
Vierecke

Rechteck: Viereck mit 4 rechten Winkeln
Quadrat: Rechteck mit 4 gleich langen Seiten
Parallelogramm: Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind.
Raute: Viereck mit 4 gleich langen Seiten
Trapez: Viereck mit 2 parallelen Seiten
Drachenviereck: Viereck, das symmetrisch zu einer Diagonalen ist.



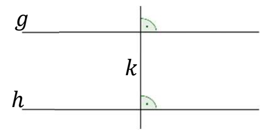
Strecken und Geraden

Strecke: Wird von zwei Punkten begrenzt.
Halbgerade (Strahl): Hat einen Anfangspunkt aber keinen Endpunkt
Gerade: Hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt.



Streckenlänge: $|\overline{AB}| = 3\ cm$

Zwei Geraden heißen zueinander parallel, wenn sie zu einer dritten Geraden senkrecht sind. Folglich schneiden sich echt parallele Geraden nie, sie haben immer denselben Abstand zueinander.



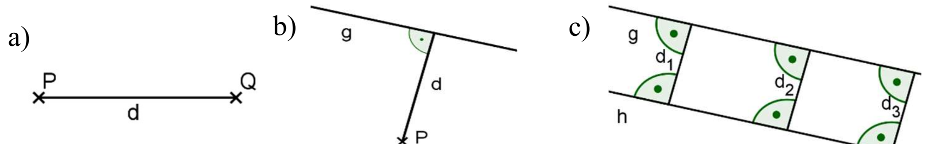
Kurzschreibweise:
$g \parallel h$
$g \perp k$
$h \perp k$

Abstand

a) zweier Punkte P und Q: Länge der Strecke $|\overline{PQ}|$

b) von Punkt P und Gerade g: Länge der zu g senkrechten Verbindungsstrecke

c) zweier paralleler Geraden g und h: Länge der zu g und h senkrechten Verbindungsstrecke

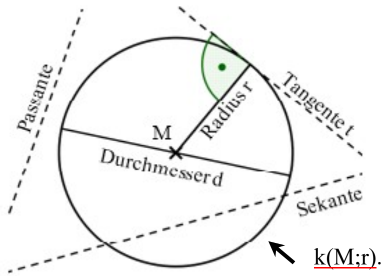


$d_1 = d_2 = d_3$

Kreis

Alle Punkte, die den gleichen Abstand von einem **Mittelpunkt** M haben, liegen auf einem **Kreis**. Den Abstand nennt man **Radius** r.

Eine Gerade heißt **Tangente** an einem Kreis, wenn sie diesen berührt, d.h. genau einen Punkt (Berührpunkt) mit dem Kreis gemeinsam hat. Die Verbindungsstrecke von Berührpunkt und Mittelpunkt des Kreises steht senkrecht auf die Tangente.
Sekante: Gerade, die den Kreis zweimal schneidet
Passante: Gerade, die den Kreis nicht schneidet



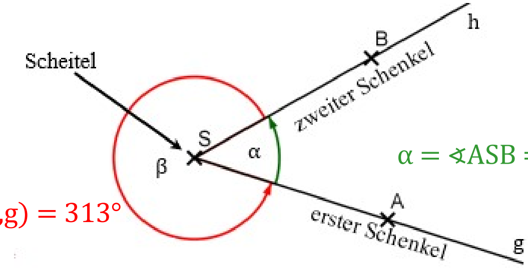
Es gilt: d = 2·r

↖ k(M;r). ⇐ „Kreis um M mit Radius r“

Winkel

Ein Winkel wird durch den **Scheitel**, seine **Schenkel** und die Drehrichtung festgelegt.
Der Drehsinn eines Winkels ist immer gegen den Uhrzeigersinn.
Die Größe eines Winkels misst man in Grad.

Besondere Winkelarten:
Spitzer Winkel α: 0° < α < 90°
Rechter Winkel α: α = 90°
Stumpfer Winkel α: 90° < α < 180°
Gestreckter Winkel α: α = 180°
Überstumpfer Winkel α: 180° < α < 360°
Vollwinkel: α = 360°

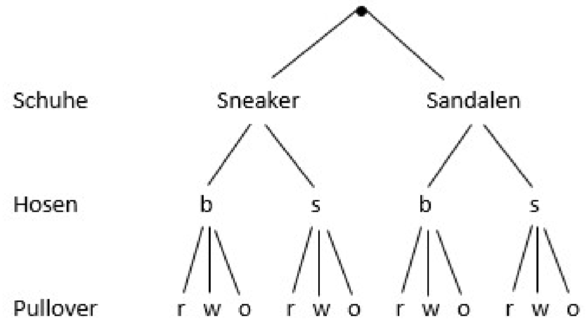


$\alpha = \sphericalangle ASB = \sphericalangle(g,h) = 47°$

$\beta = \sphericalangle BSA = \sphericalangle(h,g) = 313°$

IV Multiplikation und Division ganzer Zahlen

Fakten - Regeln	Beispiele
Begriffe: $\overbrace{\underset{\text{1. Faktor}}{2} \cdot \underset{\text{2. Faktor}}{4}}^{\text{Produkt}} = \underset{\text{Wert des Produkts}}{8}$ $\qquad$ $\overbrace{\underset{\text{Dividend}}{6} : \underset{\text{Divisor}}{3}}^{\text{Quotient}} = \underset{\text{Wert des Quotienten}}{2}$	
Rechnen mit Null und Eins: Für alle ganzen Zahlen a gilt: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $a : 1 = a$ und $0 : a = 0$ 0 ist **nie Divisor!**	$3 \cdot 0 = 0 \cdot 3 = 0$ und $4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$ $(-7): 1 = -7$ und $0 : 99 = 0$
Multiplizieren: Multipliziere die Beträge der beiden Zahlen. Haben die beiden Faktoren die gleichen Vorzeichen, ist das Ergebnis positiv. Haben die beiden Faktoren unterschiedliche Vorzeichen, ist das Ergebnis negativ. **Dividieren:** Dividiere die Beträge der beiden Zahlen. Haben Dividend und Divisor die gleichen Vorzeichen, ist das Ergebnis positiv. Haben Dividend und Divisor unterschiedliche Vorzeichen, ist das Ergebnis negativ.	$(+5) \cdot (+7) = (-5) \cdot (-7) = 35$ $(+5) \cdot (-7) = (-5) \cdot (+7) = -35$ $(+35) : (+7) = (-35) : (-7) = 5$ $(+35) : (-7) = (-35) : (+7) = -5$
Potenzieren und Faktorisieren: Eine Potenz ist ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ a heißt **Basis,** 3 heißt **Exponent** Es gilt für alle ganzen Zahlen a: $a^1 = a$ Potenzen mit Basis 10 heißen **Stufenzahlen.** Potenzen mit Exponent 2 heißen **Quadratzahlen.**	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Beachte: $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$ aber $-4^2 = -4 \cdot 4 = -16$ $9876^1 = 9876$ $10^7 = 10\,000\,000$ $13^2 = 169$
Rechengesetze: **Kommutativgesetz der Multiplikation (KG.):** Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$ **Assoziativgesetz der Multiplikation (AG.):** Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **Distributivgesetz der Multiplikation** (DG.): Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ **Distributivgesetz der Division** (DG.): Für alle ganzen Zahlen a, b, c mit $c \neq 0$ gilt: $(a + b) : c = a : c + b : c$ $(a - b) : c = a : c - b : c$ Durch Anwenden des Distributivgesetzes kann man geschickt im Kopf rechnen. ⇒ **Vorfahrtsregeln: Termberechnungen** 1. Klammern zuerst (von innen nach außen) 2. Potenzen 3. Punkt (· und :) vor Strich (+ und –) 4. Von links nach rechts	$25 \cdot 17 \cdot 4 \overset{\text{KG.}}{=} 25 \cdot 4 \cdot 17 = 100 \cdot 17 = 1700$ $17 \cdot 25 \cdot 4 \overset{\text{AG.}}{=} 17 \cdot (25 \cdot 4) = 17 \cdot 100 = 1700'$ Ausmultiplizieren $5 \cdot (2 + 4) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 10 + 20 = 30$ $5 \cdot (4 - 2) = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 20 - 10 = 10$ $(64 + 32) : 8 = 64 : 8 + 32 : 8 = 8 + 4 = 12$ $(64 - 32) : 8 = 64 : 8 - 32 : 8 = 8 - 4 = 4$ $97 \cdot 6 = (100 - 3) \cdot 6 = 100 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 600 - 18 = 582$ Ausklammern $13 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = (13 + 7) \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 100$

Fakten - Regeln	Beispiele
Baumdiagramm und Zählprinzip: Fragestellungen, bei denen man mehrfach hintereinander auswählen muss, lassen sich grafisch mit einem **Baumdiagramm** darstellen. Jede Stufe des Baums entspricht dabei einer Auswahlmöglichkeit. Jeder **Pfad** (Weg durch den Baum) des Baumes stellt eine mögliche Kombination dar. Gehen von jedem Verzweigungspunkt einer Stufe gleich viele Äste aus, ist das Baumdiagramm **regelmäßig.** Die Gesamtzahl der Auswahlmöglichkeiten stimmt mit der Anzahl der Baumenden überein **(Zählprinzip)**. Ist der Baum regelmäßig, so ist die Gesamtzahl das Produkt aus den Anzahlen der Wahlmöglichkeiten auf jeder Stufe.	Du hast zwei Hosen (blau und schwarz), drei Pullover (rot, weiß und orange) und zwei Paar Schuhe (Sneaker, Sandalen). Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es?  Anzahl der Baumenden: 12 Zählprinzip: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ (2 Schuhe, 2 Hosen, 3 Pullover)

Fakten - Regeln	Beispiele
Eine **Größe** besteht aus Maßzahl und Einheit.	12 500 m bedeutet: „12 500 mal ein Meter“; 7,5 kg; 23 min

Längeneinheiten und deren Umrechnungen:

Der Umrechnungsfaktor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Längeneinheiten ist **10.**
Ausnahme: Umrechnungsfaktor zw. Meter und Kilometer ist 1 000.

Einheit	Name	Umrechnung
1 mm	Millimeter	
1 cm	Zentimeter	1 cm = 10 mm
1 dm	Dezimeter	1 dm = 10 cm = 100 mm
1 m	Meter	1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm
1 km	Kilometer	1 km = 1 000 m = 10 000 dm…

Beispiele:

Schreibe in der kleinsten vorkommenden Einheit:
1. 8 km 57 m = 8 000 m + 57 m = 8 057 m
2. 2 m 7 dm 9 mm = 2 000 mm + 700 mm + 9 mm = 2 709 mm

Gib in gemischten Einheiten an:
1. 410 065 cm = 410 000 cm + 60 cm + 5 cm =
   = 4 100 m 6 dm 5cm = 4 km 100 m 6 dm 5cm
2. 24 050 mm = 24 000 mm + 50 mm = 24 m 5 cm

Masseeinheiten und deren Umrechnungen:

Der Umrechnungsfaktor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Masse-einheiten ist **1000.**

Einheit	Name	Umrechnung
1 mg	Milligramm	
1 g	Gramm	1 g = 1 000 mg
1 kg	Kilogramm	1 kg = 1 000 g = 1 000 000 mg
1 t	Tonne	1 t = 1 000 kg = 1 000 000 g = 1 000 000 000 mg

Zeiteinheiten und deren Umrechnungen:

Einheit	Name	Umrechnung
1 ms	Millisekunde	
1 s	Sekunde	1 s = 1 000 ms
1 min	Minute	1 min = 60 s = 60 000 ms
1 h	Stunde	1 h = 60 min = 60 · 60 s = 3 600 s
1 d	Tag	1 d = 24 h = 24 · 60 min = …
1 a	Jahr	1 a ≈ 365 d

Geldeinheiten und deren Umrechnungen:

Einheit	Name	Umrechnung
1 ct	Cent	
1 €	Euro	1 € = 100 ct

Rechnen mit Größen:

Vor dem Addieren bzw. Subtrahieren müssen die gleichartigen Größen (z. B. Längen) auf die gleiche Einheit umgerechnet werden. Anschließend werden die Maßzahlen addiert/subtrahiert, die Einheit bleibt gleich.

Eine Größe wird mit einer Zahl multipliziert, indem die Maßzahl mit der Zahl multipliziert und die Einheit beibehalten wird.

Beispiel: 1,35 m · 30 = 40,5 m

Eine Größe wird durch eine Zahl dividiert, indem die Maßzahl durch die Zahl dividiert und die Einheit beibehalten wird.

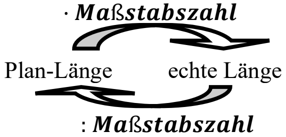
Beispiel: 213,43 kg : 7 = 30,49 kg

Eine Größe kann durch eine Größe mit gleicher Einheit dividiert werden. Das Ergebnis ist eine Zahl.

Beispiel: 1,215 m : 9 cm = 1215 cm : 9 cm = 135

Maßstab:

Die Angabe **Maßstab** $\textbf{1:}\overbrace{\textbf{200}}^{\text{Maßstabszahl}}$ in einem Plan bedeutet: 1 cm auf der Karte entsprechen 200 cm in Wirklichkeit.

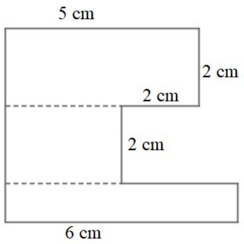
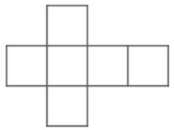
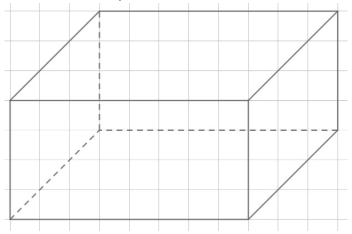


Dreisatz:

Das rechts abgebildete Verfahren wird **Dreisatz** oder **Schlussrechnung** genannt.

„entspricht“

:3	3 kg	≙	18 €	:3
·8	1 kg	≙	6 €	·8
	8 kg	≙	48 €	

Fakten - Regeln	Beispiele
Flächeneinheiten: Ein Quadrat mit Seitenlänge… hat den Flächeninhalt … 1 Millimeter 1 mm — 1 mm^2 — 1 Quadratmillimeter 1 Zentimeter 1 cm — 1 cm^2 — 1 Quadratzentimeter 1 Dezimeter 1 dm — 1 dm^2 — 1 Quadratdezimeter 1 Meter 1 m — 1 m^2 — 1 Quadratmeter 10 m — 1 a — 1 Ar 100 m — 1 ha — 1 Hektar 1 Kilometer 1 km — 1 km^2 — 1 Quadratkilometer	
Umrechnung von Flächeneinheiten: Der Umrechnungsfaktor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Flächeneinheiten ist **100.** 100 mm^2 = 1 cm^2 100 cm^2 = 1 dm^2 100 dm^2 = 1 m^2 100 m^2 = 1 a 100 a = 1 ha 100 ha = 1 km^2	14 km^2 43 a = 140 043 a 7 dm^2 4 cm^2 = 70 400 mm^2
Flächeninhalt und Umfang: Für ein **Rechteck** mit Länge a und Breite b gilt: Flächeninhalt: $A = a \cdot b$ (Länge · Breite) Umfang (Länge der Randlinie): $U = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$ Der Flächeninhalt verschiedener Figuren lässt sich berechnen, indem man • die Figur in verschiedene Rechtecke zerlegt, • die Figur zerlegt und zu einem Rechteck neu zusammensetzt oder • die Figur zu einem Rechteck ergänzt.	 $A = 5\,cm \cdot 2\,cm + 3\,cm \cdot 2\,cm + 6\,cm \cdot 1\,cm$ $= 10\,cm^2 + 6\,cm^2 + 6\,cm^2 = 22\,cm^2$ $U = 5\,cm + 2\,cm + 2\,cm + 2\,cm + 3\,cm + 1\,cm$ $+6\,cm + 5\,cm = 26\,cm$
Netz und Schrägbild: Wird die Oberfläche eines geometrischen Körpers in einer Ebene ausgebreitet, so erhält man das **Netz** dieses Körpers. Soll man den Körper zweidimensional räumlich zeichnen, verwendet man ein **Schrägbild.** Dabei gilt: • Zeichne zunächst die vordere Begrenzungsfläche in wahrer Größe. • Zeichne alle Strecken, die senkrecht zur vorderen Begrenzungsfläche stehen, parallel zur Kästchendiagonale. Verkürze dabei 1 cm auf eine Kästchendiagonale. • Zeichne die noch fehlenden Kanten der rückseitigen Begrenzungsfläche. • Von vorne nicht sichtbare Kanten werden gestrichelt gezeichnet.	Netz eines Würfels:  Schrägbild eines Quaders mit Länge 4 cm, Breite 3 cm, Höhe 2 cm: 
Oberflächeninhalt eines Quaders: Der Oberflächeninhalt eines Quaders setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten seiner sechs Seitenflächen. Für einen Quader mit Länge l, Breite b und Höhe h gilt: $O = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$	Für den oben gezeichneten Quader gilt also: $O = 2 \cdot 4\,cm \cdot 3\,cm + 2 \cdot 4\,cm \cdot 2\,cm + 2 \cdot 3\,cm \cdot 2\,cm =$ $24\,cm^2 + 16\,cm^2 + 12\,cm^2 = 52\,cm^2$