I Bruchdarstellungen, rationale Zahlen

Fakten - Regeln	*Beispiele*

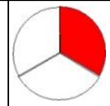
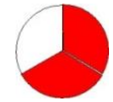
Brüche:

$\frac{z}{n}$ Bestandteile eines Bruches: n ist der **Nenner**: Das Ganze wird in n gleiche Teile zerlegt.

z ist der **Zähler**: Man nimmt sich z Teile (davon).

Prozent p%: Brüche mit Nenner n = 100 schreibt man mit dem %-Zeichen.

„Anteil", „Bruchteil": „Anteil" vom „Ganzen" = „Bruchteil"

 $\frac{1}{3}$  $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$

$19\ \% = \frac{19}{100}$

$\frac{2}{3}$ von 6 kg = $(6:3)\cdot 2\ \text{kg} = 4\ \text{kg}$

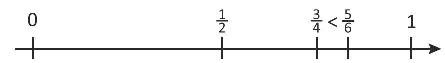
dabei ist $\frac{2}{3}$ der *Anteil* und 4 kg der *Bruchteil*.

Erweitern (bzw. **Kürzen**): Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren (bzw. dividieren). Erweitern und Kürzen verändern den Wert des Bruches nicht.

Größenvergleich von Brüchen

Brüche auf den gleichen Nenner erweitern oder kürzen und dann die Zähler vergleichen *oder* an der Zahlengerade.

$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\ \%$; $\frac{42}{56}=\frac{42:7}{56:7}=\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}=\frac{9}{12} < \frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ *oder* 

Rationale Zahlen: Zahlenmenge Q

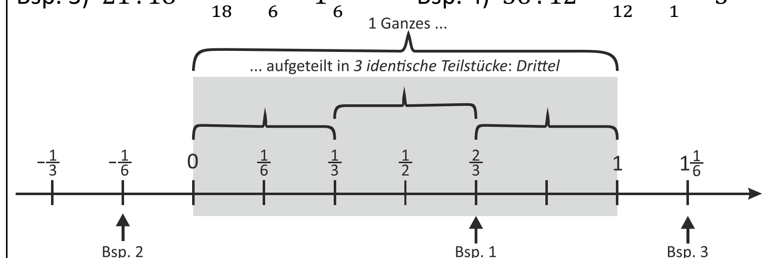
Der Bruch ist das Ergebnis einer Division: Er ist eine Zahl.

Q als Menge der Bruch-Zahlen umfasst auch die ganzen Zahlen.

„Zähler : Nenner" → ganze Zahl, wenn der Zähler ein Vielfaches des Nenners ist

Bsp. 1) $2:3=\frac{2}{3}$ Bsp. 2) $-6:36=-\frac{6}{36}=-\frac{1}{6}$

Bsp. 3) $21:18=\frac{21}{18}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ Bsp. 4) $36:12=\frac{36}{12}=\frac{3}{1}=3$



Dezimalbruch:

Kommaschreibweise: Erweiterung der Stellenwerttafel

…	H	Z	E	H	Z	E	**Komma**	z	h	t	…
…	Tausender						,	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	…

Wandlung: Bruch ↔ Dezimalbruch:

z.B. Erweitern auf eine Stufenzahl im Nenner *oder* Division.

Häufig verwendete Brüche:

$\frac{1}{2}=0{,}5$ $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$ $\frac{2}{3}=0{,}\overline{6}$ $\frac{1}{4}=0{,}25$ $\frac{3}{4}=0{,}75$ $\frac{1}{5}=0{,}2$ $\frac{2}{5}=0{,}4$ $\frac{3}{5}=0{,}6$ $\frac{4}{5}=0{,}8$

23,405 bedeutet:

2 Zehner, 3 Einer; 4 Zehntel, 0 Hundertstel, 5 Tausendstel

$\frac{3}{8}=\frac{375}{1\,000}=0{,}375$ *oder* $\frac{7}{30}=7:30=0{,}233\ldots=0{,}2\overline{3}$

$123{,}45=123+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}=123\frac{45}{100}=123\frac{9}{20}$

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Addieren und subtrahieren von Brüchen *gleichnamige* Brüche: Zähler addieren (subtrahieren) und den Nenner beibehalten. *ungleichnamige* Brüche: Erst auf den Hauptnenner erweitern.	$\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$ $\quad$ $\frac{7}{13}-\frac{3}{13}=\frac{4}{13}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$ $\quad$ $\frac{5}{6}-\frac{5}{8}=\frac{20}{24}-\frac{15}{24}=\frac{5}{24}$
Addieren und subtrahieren von Dezimalbrüchen Stellen mit gleichem Wert addieren.	3,76 + 4,532 = 8,292 $\quad$ 13,064 – 8,76 = 4,304
Multiplizieren von Brüchen Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. Dabei das Kürzen nicht vergessen.	$\frac{3}{8}\cdot\frac{12}{9}=\frac{3\cdot 12}{8\cdot 9}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $4\frac{3}{8}\cdot 3\frac{5}{21}=\frac{35}{8}\cdot\frac{68}{21}=\frac{5}{2}\cdot\frac{17}{3}=\frac{85}{6}=14\frac{1}{6}$ Gemischte Zahlen vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandeln!
Dividieren von Brüchen „Bruch : Bruch“ = „Bruch · Kehrbruch“ $\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$	*Bsp.:* $\frac{3}{14}:\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{14\cdot 6}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$
Multiplizieren mit Dezimalbrüchen Komma bleibt zunächst unberücksichtigt. Ergebnis erhält so viele Dezimalen, wie die Faktoren zusammen.	2 NKS 1 NKS 3 NKS (NachKommaStellen) *Bsp.: 1,86 ·5,4 = 10,044* 930 + 744 10044
Dividieren mit Dezimalbrüchen Komma wird bei Dividend und Divisor so weit verschoben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist. Spezialfall: Multiplizieren (*und Dividieren*) mit Stufenzahlen: Verschieben des Kommas um so viele Stellen nach rechts (*links*), wie die Stufenzahl Nullen hat.	9,2 : 8 = 1,15 $\quad$ 64,2264 : 1,68 = 6 422,64 : 168 = 38,23 2,04 · 1 000 = 2 040; $\quad$ 1,423 · 100 = 142,3 14,73 : 100 = 0,1473
Potenzen auf die Klammer achten: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \neq \frac{3^2}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$; $\frac{3^2}{4}=\frac{3^2}{4}=\frac{9}{4}$ wegen Potenz vor Punkt (Bruch bedeutet geteilt durch)
Potenzen mit *negativen Exponent* heißt „1 durch Potenz mit positivem Exponent“.	$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $\quad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=1:\frac{2}{3}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$
Zehnerpotenzen mit positiven und negativen Exponenten	10^3 = 1 000 $\quad$ $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}$ = 0,001 (Tausendstel)
Anteil von einem Bruch Das Wort „von“ wird nach einem Bruch durch „ · “ ersetzt.	*Bsp.:* $\frac{2}{5}$ *von* $\frac{3}{8}\,kg=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}\,kg=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 4}kg=\frac{3}{20}kg$
Verbindung der Grundrechenarten: **Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich** Rechengesetze (wichtig für Rechenvorteile): *Grundlagen siehe Grundwissen M5* Kommutativgesetz: a + b = b + a $\quad$ a·b = b·a Assoziativgesetz: a + (b + c) = (a + b) + c $\quad$ a·(b·c)= (a·b)·c Distributivgesetz : a·(b + c) = a·b + a·c Vorteilhaftes Rechnen hängt von der Aufgabe ab z.B. bei Strichrechnung: Sortieren von Kommazahlen und Brüchen (evtl. nach Nennern)	$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^2\cdot 4{,}2\cdot 0{,}5 \overset{AG}{=} \left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)^2\cdot(4{,}2\cdot 0{,}5)=0{,}5^2\cdot 2{,}1=$ $0{,}25\cdot(2+0{,}1)\overset{DG}{=}0{,}25\cdot 2+0{,}25\cdot 0{,}1=0{,}5+0{,}025=0{,}525$ $\frac{1}{6}+1{,}25+\frac{1}{3}+0{,}4\overset{KG}{=}\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+1{,}25+0{,}4\overset{AG}{=}$ $\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)+(1{,}25+0{,}4)=\frac{3}{6}+1{,}65=0{,}5+1{,}65=2{,}15$

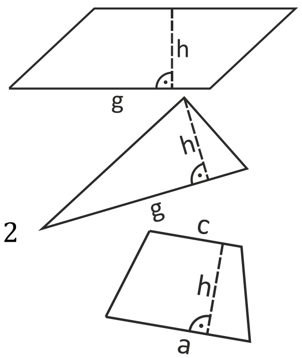
Fakten - Regeln	*Beispiele*

Flächenformeln für das ...

... Parallelogramm A_P = Grundlinie g · Höhe h = g · h

... Dreieck $A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{g \cdot h}{2} = (g \cdot h) : 2$

... Trapez $A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h = (a + c) \cdot h : 2$

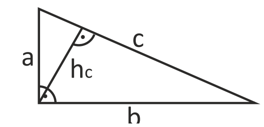


Grundlagen rund um die n-Ecke: siehe Grundwissen M5

Zusammengesetzte Flächen können mit Hilfe der Additions- oder Subtraktionsmethode berechnet werden.

Additionsmethode: Zerlegung der Figur in mehrere Dreiecke, Rechtecke, Parallelogramme, Trapeze.

Subtraktionsmethode: Von einer zu großen Fläche werden die Dreiecke, Rechtecke, ... als Lücken subtrahiert.

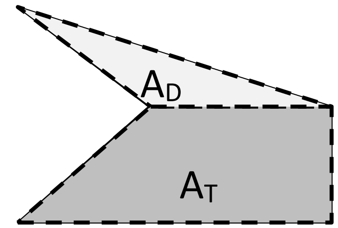


rechtwinkliges Dreieck

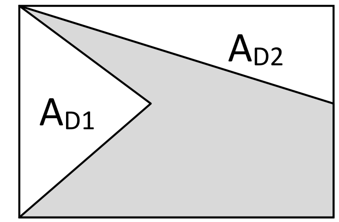
mit a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm

$A = \frac{1}{2} \cdot 3\ cm \cdot 4\ cm = 6\ cm^2 =$

$\frac{1}{2} \cdot 5\ cm \cdot h_c$ => h_c = 2,4 cm



$A = A_T + A_D$
(Additionsmethode)



$A = A_{Rechteck} - A_{D1} - A_{D2}$
(Subtraktionsmethode)

Oberfläche eines Körpers: Summe aller Begrenzungsflächen

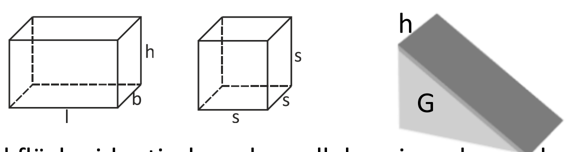
Netz eines Körpers: Begrenzungsflächen in der Zeichenebene ausgebreitet

(Ober-)Flächeninhalt der Grundkörper:

O_{Quader} = (l · b + l · h + b · h) · 2

$O_{Würfel}$ = 6·s²

O_{Prisma} = 2·Grundfläche G + Mantelfläche



(Gerades) Prisma: Körper, dessen Grund- und Deckfläche identisch und parallel zueinander sind. Die Seitenflächen sind Rechtecke.

Oberfläche des abgebildeten Dreiseitigen Prismas:

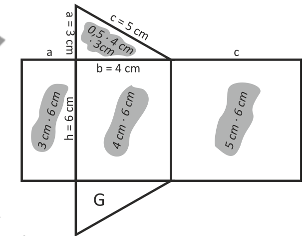
Höhe h = 6 cm

Grundfläche G: rechtwinkliges Dreieck
mit a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm

G = 6 cm²

M = 3 cm · 6 cm + 4 cm · 6 cm + 5 cm · 6 cm
= (3 cm + 4 cm + 5 cm) · 6 cm = 72 cm²

Oberflächeninhalt: O = 2 · 6 cm² + 72 cm² = 84 cm²



Volumeneinheiten

1 m³ = 1 000 dm³ ; 1 dm³ = 1 000 cm³ ; 1 cm³ = 1 000 mm³

1 ml = 1 cm³ ; 1 l = 1 dm³ ; 1 hl = 100 l

Volumen
Umrechnungsfaktor: **1 000**
mm³ → cm³ → dm³ → m³

1 m³ = 1 m · 1 m · 1 m =
10 dm · 10 dm · 10 dm = 1 000 dm³

Grundlagen: siehe Grundwissen M5

Fläche
Umrechnungsfaktor: **100**
mm² → cm² → dm² → m² → a → ha → km²

Länge
Umrechnungsfaktor: **10**
mm → cm → dm → m

Volumenformeln

V_{Quader} = Länge l · Breite b · Höhe h = l · b · h

$V_{Würfel}$ = s³ (Kantenlänge s)

V_{Prisma} = Grundfläche G · Höhe h = G · h

Wandle 0,4 Liter in cm³: 0,4 l = 0,4 dm³ = $0,\underbrace{400}$ dm³ = 400 cm³

pro Umrechnungs-Stufe 3 Stellen

Würfel mit 6 cm Kantenlänge V_W = (6 cm)³ = 216 cm³

Quader mit l = 6 cm, b = 5 cm und h = 4 cm V_Q = 4 cm·5 cm·6 cm= 120cm³

Auf eine quadratische Grundfläche von 1 m Seitenlänge fallen 5 mm Regen. Wie viel Liter sind das?

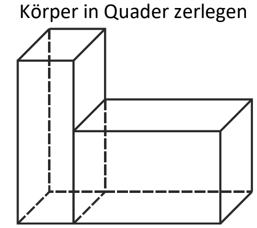
V = l · b · h = 1 m² · 5 mm = 100 dm² · 0,05 dm = 5 dm³ = 5 l

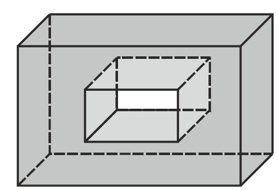
Dreiseitiges *Prisma* (wie oben) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm, h = 6 cm

V_P = G · h = 6 cm² · 6 cm = 36 cm³

Rauminhalt von zusammengesetzten Körpern:

Körper in Quader zerlegen *oder* zu einem Quader ergänzen





Fakten - Regeln	Beispiele

Grundbegriffe:

- **Grundwert (GW):** das Ganze entspricht 100 %
- **Prozentwert (PW):** der Bruchteil
- **Prozentsatz (PS):** der Anteil

16 % von 25 € = 4 €
Prozentsatz (PS) Grundwert (GW) Prozentwert (PW)

Prozentrechnungen: Grundgleichung der Prozentrechnung: PS · GW = PW nutzen bzw. umkehren.

ODER Dreisatz

PW: 20 % von 240 cm = $\frac{20}{100}$ · 240 cm = 48 cm

oder: 240 cm = 100 %
24 cm = 10 %
PW: 48 cm = 20 %

oder: 64 € = 16 %
4 € = 1 %
GW: 400 € = 100 %

GW: 16 % von ◯ = 64 €; => ◯ = 64 € : 0,16 = 400 €

PS: 75 g von 1,5 kg = $\frac{75\,g}{1500\,g} = \frac{5}{100} = 5\%$

Verändert sich eine Größe, so muss der Prozentsatz ausgehend von der Anfangssituation (100 %) neu bestimmt werden.

Rabatt von 10 %: PS = 100 % - 10 % = 90 %
Preiserhöhung um 15 %: PS = 100 % + 15 % = 115 %

Auswertung von Daten:

Treffer: das beobachtete Merkmal liegt vor

Relative Häufigkeit = $\frac{Anzahl\ der\ Treffer}{Gesamtzahl\ der\ Daten} = \frac{Absolute\ Häufigkeit}{Gesamtzahl\ der\ Daten}$

Arithmetisches Mittel:

$$m = \frac{\mathbf{1.Anzahl \cdot 1.Wert \ + \ 2.Anzahl \cdot 2.Wert \ + \ \ldots \ + \ letzte\ Anzahl \cdot letzter\ Wert}}{\mathbf{Gesamtzahl\ der\ Daten}}$$

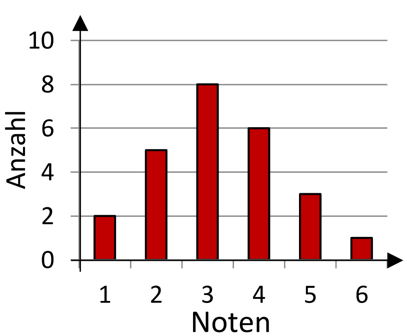
Schulaufgaben-Ergebnis: (25 Kinder)

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl Absolute Häufigkeit	2	5	8	6	3	1
Relative Häufigkeit	$\frac{2}{25}$ = 8 %	$\frac{5}{25}$ = 20 %	$\frac{8}{25}$ = 32 %	$\frac{6}{25}$ = 24 %	$\frac{3}{25}$ = 12 %	$\frac{1}{25}$ = 4 %

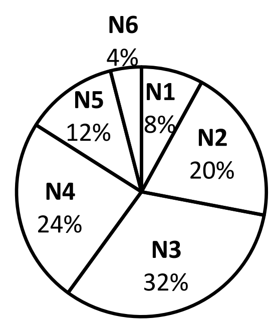
$$m = \frac{2 \cdot 1 \ + \ 5 \cdot 2 \ + \ 8 \cdot 3 \ + \ 6 \cdot 4 \ + \ 3 \cdot 5 \ + \ 1 \cdot 6}{25} = \frac{81}{25} = 3{,}24$$

Umsetzung einer Tabelle in ein Diagramm:

z.B. **Säulendiagramm**:
Wert = Höhe der Säule

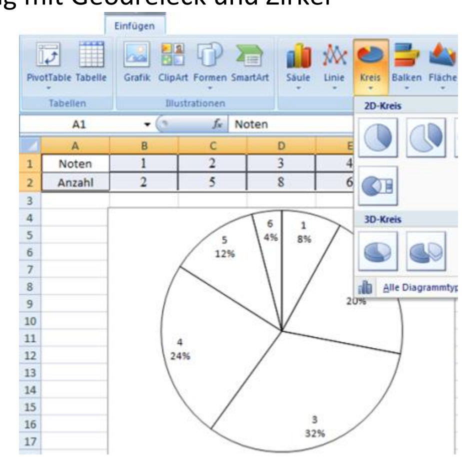


z.B. **Kreisdiagramm**:
Wert = Winkel; 1 % = 3,6°



Anfertigung mit Geodreieck und Zirkel

oder:



Tabellenkalkulation