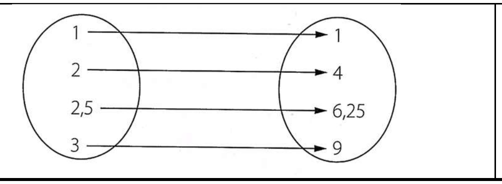
I Funktion und Term

Fakten – Regeln	*Beispiele*

Funktion:

Eine Funktion ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem x-Wert aus der einen Menge genau einen y-Wert der anderen Menge zuordnet.

f: Seitenlänge x eines Quadrats (in cm) ↦ Flächeninhalt A des Quadrats (in cm²)



$f(x) = x^2$

Definitionsmenge: Alle möglichen x-Werte der Funktion
Wertemenge: Alle auftretenden y-Werte (Funktionswerte)

$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow D_f = \mathbb{Q} \quad \Rightarrow W_f = \mathbb{Q}_0^+ = [0; +\infty[$

Darstellungsarten einer Funktion:

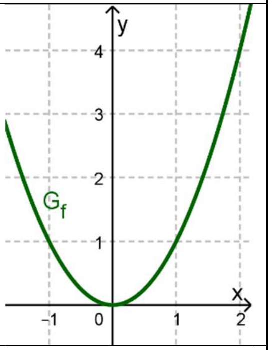
- Funktion, Funktionsgleichung
- Wertetabelle
- Graph

Funktion: $f(x) = x^2$ **Funktionsgleichung:** $y = x^2$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2
f(x)	1	0	1	4

Graph:



Berechnung des Schnittpunkts des Graphen mit den Koordinatenachsen:

- Der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse berechnet sich, indem man x = 0 einsetzt und y berechnet.
- Der Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse berechnet sich, indem man y = 0 einsetzt und x berechnet. Dieser x-Wert wird Nullstelle genannt.

$y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$ einsetzen

$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow Sy\ (0|3)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0$ einsetzen

$0 = \frac{1}{2}x + 3 \qquad | - 3$

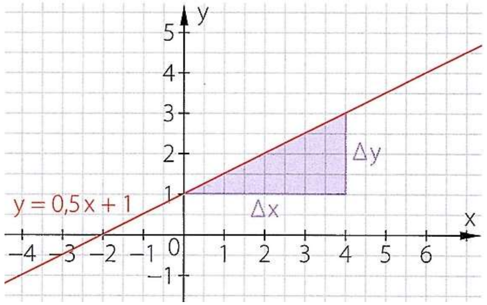
$-3 = -\frac{1}{2}x \qquad |:\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = 6$ ist die Nullstelle

$Sx = (6|0)$

Berechnung des Schnittpunkts zweier Funktionen: 1. Setze die Funktionsterme gleich. 2. Löse nach x auf. 3. Setze die x-Koordinate in eine der Funktionsgleichungen ein.	$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \qquad g(x) = 4x - 1$ $-\frac{1}{2}x + 3 = 4x - 1 \qquad \mid +\frac{1}{2}x$ $3 = 4{,}5x - 1 \qquad \mid +1$ $4 = 4{,}5x \qquad \mid : 4{,}5$ $x = \frac{4}{4{,}5} = \frac{8}{9} \qquad \Rightarrow f\left(\frac{8}{9}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} + 3 = 2\frac{5}{9} \;\Rightarrow S\left(\frac{8}{9} \middle\vert 2\frac{5}{9}\right)$

II LINEARE FUNKTIONEN

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Lineare Funktionen: Eine Funktion $x \mapsto y$ mit der Funktionsgleichung y = mx + t heißt lineare Funktion. Ihr Graph ist eine Gerade. **Steigung der Linearen Funktion:** Die Steigung kann mithilfe eines Steigungsdreiecks berechnet werden. Der Parameter m ist die Steigung: $m = \frac{\text{Änderung in } y\text{−Richtun}}{\text{Änderung in } x\text{−Richtun}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - Für m < 0 fällt die Gerade - Für m = 0 verläuft die Gerade parallel zur x-Achse - Für m > 0 steigt die Gerade **y-Achsenabschnitt der Linearen Funktion:** Der Parameter t ist der y-Achsenabschnitt. Das ist der Punkt (0|t), an dem der Graph der Funktion die y-Achse schneidet.	**Funktionsgleichung:** $y = 0{,}5x + 1$  **Steigung m:** $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = 0{,}5 > 0 \Rightarrow$ Die Gerade steigt. **y-Achsenabschnitt t:** t = 1
Geradengleichung aufstellen, wenn zwei Punkte A und B gegeben sind: 1. Steigung m berechnen mit : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ 2. Den Wert für m und die Koordinaten von einem der Punkte in $y = mx + t$ einsetzen, nach t auflösen.	Gesucht ist die Gerade durch die zwei Punkte A (4|3) und B (6|4): 1. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{6-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ 2. Setze $m = 0{,}5$ und A (4|3) in $y = mx + t$ ein: $3 = 0{,}5 \cdot 4 + t \quad \Rightarrow 3 = 2 + t \quad \Rightarrow t = 1$ $\Rightarrow f(x) = 0{,}5x + 1$
Lineare Ungleichungen: Lineare Ungleichungen sind zwei lineare Gleichungen, die durch ein Ungleichheitszeichen verbunden sind. Sie werden mit Äquivalenzumformungen (siehe Grundwissen Jgst. 7) gelöst. **Ausnahme:** Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.	$-3y + 5 \leq y + 3$ mit $G = \mathbb{Q}$ $-3y + 5 \leq y + 3 \qquad \mid -5$ $-3y \leq y - 2 \qquad \mid -y$ $-4y \leq -2 \qquad \mid : (-4) \Rightarrow \text{Hier dreht sich das Ungleichheitszeichen um}$ $y \geq 0{,}5 \qquad \Rightarrow$Lösungsmenge: $L = [0{,}5; \infty[$

Direkte Proportionalität

Wird eine Größe verdoppelt, verdreifacht, halbiert... , so führt dies zu einer Verdoppelung, Verdreifachung, Halbierung … der anderen Größe.
Der Spezialfall einer Linearen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = m \cdot x$ heißt direkte Proportionalität ($m \neq 0$).
Der Graph einer direkten Proportionalität ist eine Ursprungsgerade.
Dabei heißt m Proportionalitätsfaktor

Beispiel: Ein Liter Benzin kostet 1,549 €.

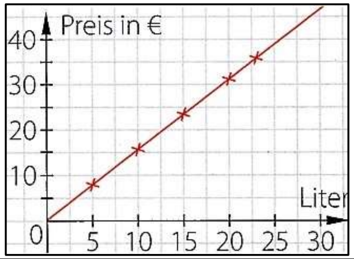
Funktion f: Volumen Benzin in l ⟼ Preis in € ⇒ **Funktionsterm:** $f(x) = 1{,}549€$

Proportionalitätsfaktor: $m = \frac{y}{x} = 1{,}549$

Wertetabelle:

x	5	10	15	20	25
f(x)	7,75	15,49	23,34	30,98	35,63

Graph:



III Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Fakten - Regeln	*Beispiele*

Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = \frac{a}{x+b} + c$ und den Parametern a, b, c heißen elementare gebrochen-rationale Funktionen (x ≠ -b, a ≠ 0). Die Graphen dieser Funktionen heißen Hyperbeln.

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-b\}$

Parameter c

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{a}{x+b} + c$ verschiebt den Graphen der Funktion $y = \frac{a}{x+b}$ um c in positive y-Richtung (a ≠ 0), d.h. für c > 0 nach oben und für c < 0 nach unten

Parameter b

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{a}{x+b} + c$ verschiebt den Graphen der Funktion $y = \frac{a}{x} + c$ um $-b$ in positive x-Richtung (a ≠ 0), d.h. für b > 0 nach links und für b < 0 nach rechts.

Asymptoten

Gleichung der waagrechten Asymptoten: $y = c$
Gleichung der senkrechten Asymptoten: $x = -b$

$$f(x) = \frac{2}{x+1} + 1{,}5$$

Parameter: $a = 2, b = 1, c = 1{,}5$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$

Parameter c:

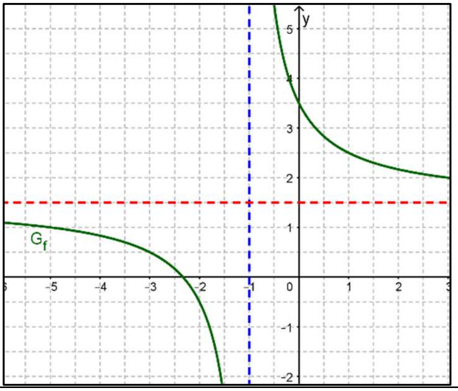
$c = 1{,}5 > 0$. D. h. der Graph von $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ist um c = 1,5 nach oben verschoben.

Parameter b:

$b = 1 > 0$. D. h. der Graph von $f(x) = \frac{2}{x} + 1{,}5$ ist um 1 nach links verschoben.

Asymptoten:

Gleichung der waagrechten Asymptote:
$y = 1{,}5$
Gleichung der senkrechten Asymptote:
$x = -1$



Indirekte Proportionalität

Wird eine Größe verdoppelt, verdreifacht, halbiert …, so führt dies zu einer Halbierung, Verdreifachung, Verdoppelung … der anderen Größe.
Der Spezialfall einer elementaren gebrochen-rationalen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{a}{x}$ heißt indirekte Proportionalität ($a \neq 0, x \neq 0$).
Der Graph einer indirekten Proportionalität ist ein Teil einer Hyperbel.
Alle Wertepaare haben den gleichen Produktwert $a = x \cdot y$ (Produktgleichheit)

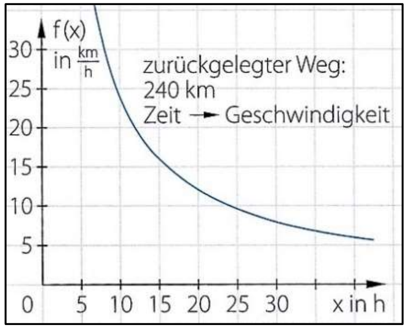
Beispiel: Eine Strecke von 240 km wird zurückgelegt. Wie groß die Geschwindigkeit ist, hängt von der Zeit ab.

Funktion f: Zeit in h ⟼ Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ ⇒**Funktionsterm:** $f(x) = \frac{240}{x}$

Wertetabelle:

Zeit x in h	1,5	2,5	3	7,5
Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	160	96	80	32

Graph:



Proportionalitätsfaktor:

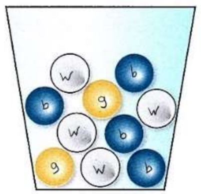
$a = x \cdot y = 1{,}5 \cdot 160 = 2{,}5 \cdot 96 = 3 \cdot 80 = 7{,}5 \cdot 32 = 240$

IV Bruchterme und Bruchgleichungen

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Bruchterm Ein Bruchterm ist ein Term mit einer Variablen im Nenner. **Definitionsmenge** Die Definitionsmenge besteht aus allen Zahlen, für die der Nenner beim Einsetzen nicht null wird. **Kürzen und Erweitern von Bruchtermen** Einen Bruchterm kann man kürzen bzw. erweitern, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl/ denselben Term dividiert bzw. multipliziert. Gegebenenfalls muss der Zähler bzw. Nenner erst faktorisiert werden. **Addieren und subtrahieren von Bruchtermen** Gleichnamige Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält. Ungleichnamige Bruchterme werden zuerst durch Erweitern oder Kürzen auf den Hauptnenner gebracht und gleichnamig gemacht. **Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen** Bruchterme werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch dieses Bruchterms multipliziert.	**Kürzen:** $\frac{16}{4x^2-12x} = \frac{4\cdot4}{4x\cdot(x-3)} = \frac{4}{x(x-3)}$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{0;3\}$ **Addieren:** $\frac{4}{y-3} + \frac{1}{y+3} = \frac{4y\cdot(y+3)}{(y-3)(y+3)} + \frac{1\cdot(y-3)}{(y+3)(y-3)} = \frac{4y(y+3)+y-3}{(y+3)(y-3)} = \frac{4y^2+13y-}{y^2-9}$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{-3;3\}$ **Subtrahieren:** $\frac{4}{y} - \frac{y}{y+3} = \frac{4(y+3)}{y(y+3)} - \frac{y^2}{y(y+3)} = \frac{4(y+3)-y^2}{y^2+3y} = \frac{4y+12- \ ^2}{y^2+3y}$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{-3;0\}$ **Multiplizieren:** $\frac{4}{z}\cdot\frac{z-5}{z} = \frac{4\cdot(z-5)}{z\cdot z} = \frac{4z-20}{z^2}$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ **Dividieren:** $\frac{4z}{z+3} : \frac{2}{z+3} = \frac{4z\cdot(z+3)}{(z+3)\cdot2} = 2z$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{-3\}$

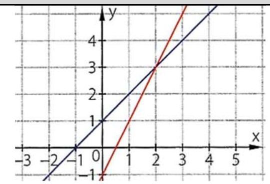
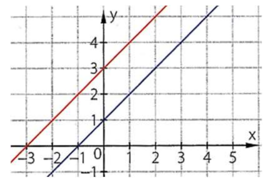
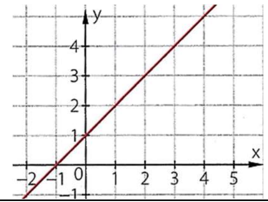
Bruchgleichung Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung in der eine Variable im Nenner auftritt. **Lösungsstrategien:** - Über-Kreuz-Multiplizieren - Auf Hauptnenner bringen und die Zähler vergleichen	**Über-Kreuz-Multiplikation:** $\frac{2}{x+3} \quad \frac{1}{x}$ $\qquad D = \mathbb{Q}\backslash\{-3; 0\}$ $2 \cdot x = 1(x+3) \qquad \Rightarrow x = 3 \qquad \Rightarrow L = \{3\}$ **Auf den Hauptnenner bringen und die Zähler vergleichen:** $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x} \qquad D = \mathbb{Q}\backslash\{-3; 0\}$ $\frac{2x}{x(x+3)} = \frac{x+3}{x(x+3)} \qquad \Rightarrow 2x = x + 3 \qquad \Rightarrow x = 3 \qquad \Rightarrow L = \{3\}$
Potenzgesetze Für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten n, m und Basen x, y ≠ 0 gilt: - <u>bei gleicher Basis:</u> $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ $x^n : x^m = x^{n-m}$ bzw. $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ - <u>bei gleichem Exponenten:</u> $(x \cdot y)^n = x^n \cdot x^m$ $(x : y)^n = x^n : y^n$ bzw. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ - <u>beim Potenzieren von Potenzen:</u> $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$	**Potenzen mit gleicher Basis:** $7^5 \cdot 7^3 = 7^{5+3} = 7^8$ $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$ bzw. $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$ **Potenzen mit gleichem Exponenten:** $(7 \cdot 4)^5 = 7^5 \cdot 4^5$ $(7 : 4)^5 = 7^5 : 4^5$ bzw. $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7^5}{4^5}$ **Potenzieren von Potenzen:** $(7^5)^3 = 7^{5 \cdot 3} = 7^{15}$

V Zufallsexperimente

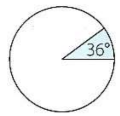
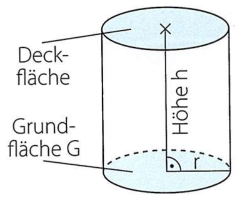
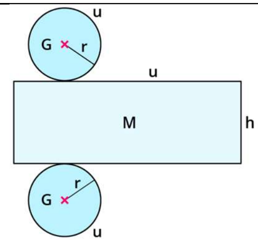
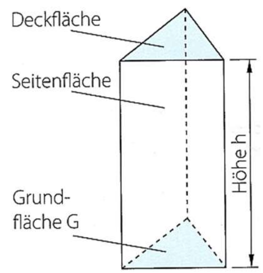
Fakten - Regeln	*Beispiele*
Ergebnismenge Ω Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments **Ereignis** Teilmenge der Ergebnismenge **Gegenereignis $\overline{E}$** Das Gegenereignis besteht aus allen Ergebnissen der Ergebnismenge Ω die nicht in E enthalten sind.	**Beispiel:** Ziehen aus dieser Urne mit Zurücklegen  Ergebnismenge $\Omega = \{b; w; g\}$ Beispiele für ein Ereignis und sein Gegenereignis: $B = \{w\}$. Das Ereignis B ist ein Elementarereignis, da es nur ein Element aus der Ergebnismenge umfasst. $\bar{B} = \{b;\ g\}$
Das empirische Gesetz der großen Zahlen Bei einer sehr großen Anzahl von Durchführungen eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses E um einen bestimmten Wert. Mit diesem Wert kann man die Wahrscheinlichkeit P(E) des Ereignisses E abschätzen.	
Laplace-Experimente	**Beispiel:** Würfeln mit einem sechsseitigen ungezinkten Würfel („Laplace-Würfel“):

Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace-Experimente. **Laplace-Wahrscheinlichkeiten** $P(E) = \frac{Anzahl\ der\ für\ E\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{\lvert E \rvert}{\lvert \Omega \rvert}$	Wahrscheinlichkeit eine 1 zu würfeln: $P(1) = \frac{Anzahl\ der\ für\ E\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$ Wahrscheinlichkeit eine 5 oder 6 zu würfeln: $P(5;6) = \frac{Anz\quad der\ für\ E\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{2}{6} = 0{,}\overline{3}$

VI Lineare Gleichungssysteme

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Lineares Gleichungssystem (LGS) Zwei lineare Gleichungen mit **zwei** gleichen Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem. **Anzahl der Lösung(en) eines linearen Gleichungssystems** Jedes Wertepaar (x|y), das beide Gleichungen erfüllt, ist eine Lösung des Gleichungssystems. Dieses hat … - …eine Lösung, wenn die zugehörigen Geraden sich in einem Punkt $(x\|y)$ schneiden. $L = \{(x\|y)\}$ - …keine Lösung, wenn die zugehörigen Geraden parallel verlaufen. $L = \{\ \}$ - …unendlich viele Lösungen, wenn die zugehörigen Geraden identisch sind.	**Beispiel:** Eine Lösung $(I)\ \ 2x - y = 1$ $(II)\qquad x = y - 1$ Das Zahlenpaar (2|3) ist die einzige Lösung. $\Rightarrow L = \{(2\|3)\}$  **Beispiel:** Keine Lösung $(I)\qquad y = x + 1$ $(II)\ y - 3 = x$ Die zugehörigen Graphen verlaufen parallel. Es gibt keine Lösung. $\Rightarrow\ L = \{\ \ \}$  **Beispiel:** Unendlich viele Lösungen $(I)\qquad y = x + 1$ $(II)\ y - 1 = x$ Die zugehörigen Graphen sind identisch. Alle Punkte auf der Geraden $y = x + 1$ sind Lösungen des LGS. 
Ein lineares Gleichungssystem ist z.B. mit Hilfe des **Einsetzungsverfahrens** zu lösen: Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf und setze diesen Term in die andere Gleichung ein. **Spezialfälle:** - Entsteht eine falsche Aussage, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. L = { } - Entsteht eine richtige Aussage, die nicht von den Variablen abhängt, dann hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.	**Einsetzungsverfahren:** (I) $\quad -5x + 2y = 80$ (II) $\quad 3x + y = -15 \quad \| -3x$ (II)' $\quad y = -3x - 15$ (II)' in (I): $\quad -5x + 2 \cdot (-3x - 15) = 80$ $-5x - 6x - 30 = 80$ $-11x = 110$ $x = -10$ $x = -10$ in (I): $\quad -5 \cdot (-10) + 2y = 80$ $50 + 2y = 80$ $2y = 30 \Rightarrow y = 15 \ \Rightarrow L = \{(-10 \| 15)\}$

VII Kreis, Prisma und Zylinder

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Kreis Umfang u: $u_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$ Flächeninhalt A: $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$	Berechne für $r = 5cm$ den Flächeninhalt A und den Umfang u des Kreises. $A_s = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (5cm)^2 \approx 78{,}54cm^2$ $u = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5cm \approx 31{,}42cm$
Kreisteile Der Mittelpunktswinkel α bestimmt einen Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt A_s und der Bogenlänge b.	Berechne für $r = 15cm$ den Flächeninhalt A_s und die Bogenlänge b des Kreisausschnitts mit $\alpha = 36°$  $A_s = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot (15cm)^2 \cdot \frac{36°}{360°} \approx 70{,}69cm^2$ $b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°} = 2 \cdot \pi \cdot 15cm \cdot \frac{36°}{360°} \approx 9{,}42cm$
Zylinder Oberflächeninhalt: $O_{Zylinder} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ Volumen: $V_{Zylinder} = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$	  **Beispiel:** Berechne O und V des Zylinders für $r = 5cm$ und $h = 3cm$. $O_{Zyl.} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot (5cm)^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5cm \cdot 3cm \approx 251{,}33cm^2$ $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (5cm)^2 \cdot 3cm = 235{,}62cm^3$
Prisma Ein Prisma ist ein Körper, der von zwei kongruenten n-Ecken als Grund- und Deckfläche sowie von n Rechtecken als Seitenflächen begrenzt wird. Die Grund- und Deckfläche kann unterschiedliche Formen besitzen (Dreieck, Viereck, Trapez etc.). Oberflächeninhalt: $O_{Prisma} = 2 \cdot G + M$ Volumen: $V_{Prisma} = G \cdot h$	**Beispiel:** Berechne O und V eines dreiseitigen Prismas. Die dreieckige Grundfläche ist rechteckig und hat die Seitenlängen $a = 3cm$, $b = 4cm$ und $c = 5cm$. Die Höhe des Prismas beträgt $h = 3cm$.  $O_{Prisma} = 2 \cdot G + M$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3cm \cdot 4cm + 4cm \cdot 3cm + 3cm \cdot 3cm + 5cm \cdot 3cm$ $= 43cm^2$ $V_{Prisma} = G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3cm \cdot 4cm \cdot 3cm = 18cm^3$