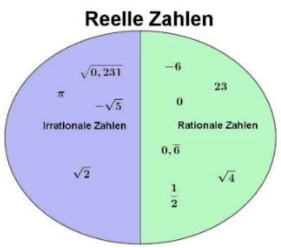
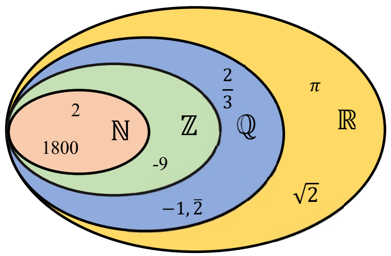
Wirsberg-Gymnasium

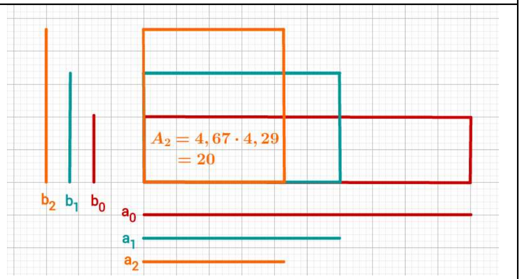
Grundwissen Mathematik: 9. Jahrgangsstufe G9

I Quadratwurzeln

Grundlagen aus vorherigen Jahrgangstufen

Zahlenmengen (Grundwissen Jgst. 6)

Fakten – Regeln	*Beispiele*
Quadratwurzel und Radikand Für $r \geq 0$ ist $\sqrt{r}$ die nicht negative Zahl, deren Quadrat r ergibt. $\sqrt{r}$ ist die <u>Quadratwurzel von r</u>. r heißt <u>Radikand</u> der Wurzel. *„Die Quadratwurzel einer Zahl a ist diejenige Zahl, die man quadrieren muss, um a zu erhalten.“*	$\sqrt{9} = 3, denn\ 3^2 = 9$ $\sqrt{-3}$ existiert nicht, da der Radikand negativ ist.
Wurzelterme Treten Variablen im Radikanden auf, so bezeichnet man diese Terme als <u>Wurzelterme</u>. Die Definitionsmenge D eines Wurzelterms besteht aus allen Zahlen, für die der Radikand beim Einsetzen nicht negativ wird.	$T_1(x) = \sqrt{5x+8}\,; D_{T_1} = [-\frac{8}{5};\ \infty[$ $T_2(a) = \sqrt{(a+2)^2}\,; D_{T_2} = \mathbb{R}$ $T_3(x) = -\sqrt{x-7}\,; D_{T_3} = [7;\ \infty[$
Notwendigkeit von Betragsstrichen Für jede reelle Zahl x gilt: $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$. Die Definitionsmenge ist also $\mathbb{R}$, da jede Zahl quadriert größer oder gleich 0 ist.	$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
Wurzelziehen in Gleichungen – Verwendung des Betrags	$x^2 = 4 \quad \vert\sqrt{\ }$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ $\lvert x \rvert = 2$ Es folgt: $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$
Reelle Zahlen Nichtperiodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen sind keine rationalen Zahlen. Sie heißen <u>irrationale Zahlen.</u> Alle irrationalen und alle rationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der <u>reellen Zahlen</u>. Man schreibt $\mathbb{R}$.	  *Quelle: www.serlo.de*

Regeln für das Rechnen mit Wurzeln $$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \geq 0)$$ $$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \quad (a \geq 0, b > 0)$$ Summen und Differenzen von Quadratwurzeln kann man nur dann zusammenfassen, wenn die Radikanden gleich sind. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$ und $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$ $$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$$ $$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$$ **Teilweises Radizieren** Ist der Radikand keine Quadratzahl, so kann man manche Wurzeln zumindest teilweise radizieren. Hierzu muss man den Radikanden faktorisieren, also als Produkt darstellen. **Rationalmachen des Nenners** Durch geeignetes Erweitern können Quadratwurzeln im Nenner eines Bruchs beseitigt werden, sodass der Nenner eine rationale Zahl wird.	$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12$ $\sqrt{16} : \sqrt{9} = \sqrt{16 : 9} = \frac{4}{3}$ $3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 2\sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$ $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3+2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ $\frac{125}{\sqrt{5}} = \frac{125 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{125\sqrt{5}}{5} = 25\sqrt{5}$
Das Heron-Verfahren – näherungsweises Bestimmen von Quadratwurzeln Das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Quadratwurzel $\sqrt{z}$ ist ein Iterationsverfahren, d.h. die gleichen Rechenschritte werden jeweils mit den Ergebnissen des vorausgegangenen Schritts durchgeführt. Formel: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{z}{a_n}\right)$	Wir bestimmen den Wert von $\sqrt{20}$ näherungsweise. Idee: Suchen eines Quadrates mit der Seitenlänge $\sqrt{20}$ $a_0 = 10$ $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{z}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(10 + \frac{20}{10}\right) = 6$ $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{z}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{20}{6}\right) = 4,\overline{6}$  *Quelle: www.serlo.de*

II Quadratische Funktionen

Fakten - Regeln	Beispiele

Verschiebung der Normalparabel

Verschiebung in y-Richtung: $f(x) = x^2 + y_s$

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + y_s$ ist eine entlang der y-Achse verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S $(0|y_s)$.

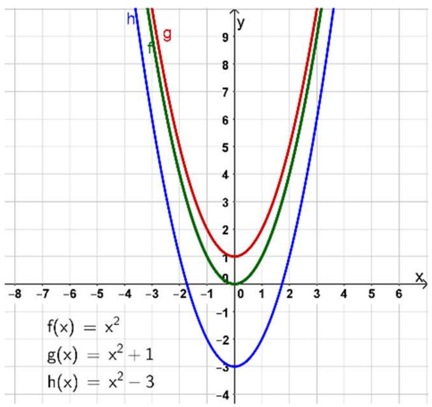
Verschiebung in x-Richtung: $f(x) = (x + x_s)^2$

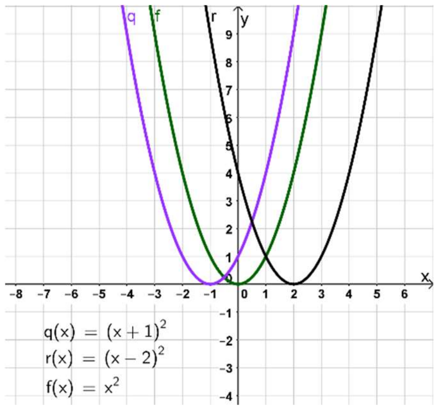
Der Graph der Funktion $f(x) = (x + x_s)^2$ ist eine entlang der x-Achse verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S $(-x_s|0)$. Der x-Wert des Scheitelpunkts ist gleichzeitig die Nullstelle der Funktion.

Einfluss des Vorfaktors a:

a > 1 oder a < -1: Parabel ist enger geöffnet als die Normalparabel.

0 < a < 1 bzw. -1 < a < 0: Parabel ist weiter geöffnet als die Normalparabel.





Quadratische Ergänzung

Um Funktionsterme von der Normalform in die Scheitelpunktform umwandeln zu können, wird häufig die quadratische Ergänzung benötigt.

1. Ausklammern
2. Quadratisch ergänzen
3. Binomische Formel anwenden
4. Eckige Klammer auflösen

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 + 12x - 13 \\
&= -2\,[x^2 - 6x + 6{,}5] \\
&= -2[x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + (3)^2 - (3)^2 + 6{,}5] \\
&= -2\,[x^2 - 6x + 9 - 9 + 6{,}5] \\
&= -2\,[x^2 - 6x + 9 - 2{,}5] \\
&= -2\,[(x-3)^2 - 2{,}5] \\
&= -2\,(x-3)^2 + 5
\end{aligned}$$

Darstellungsformen quadratischer Funktionen

Normalform/ Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

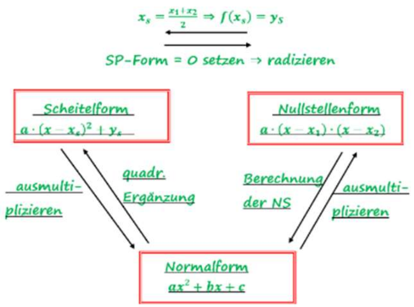
Vorteil: Öffnungsfaktor ablesbar; y-Achsenabschnitt ablesbar ⇒ c = $f(0)$

Scheitelpunktform/ Scheitelform:

$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit

Scheitel: $S(x_s|y_s)$

Vorteil: Öffnungsfaktor ablesbar; Koordinaten des Scheitelpunkts ablesbar; Verschiebung der Parabel in x- und y-Richtung ablesbar



Nullstellenform:

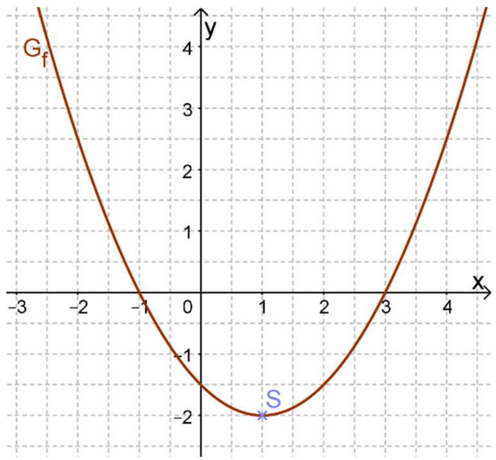
$f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$

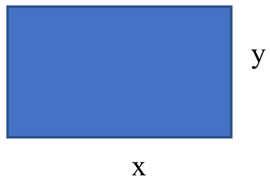
Vorteil: Öffnungsfaktor ablesbar; Nullstellen x_1 und x_2 ablesbar.

$f(x) = 0{,}5x^2 - x - 1{,}5$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - 2$

$f(x) = 0{,}5 \cdot (x+1)(x-3)$



Lösen quadratischer Gleichungen - Direktes Radizieren, falls in der Form $(x+d)^2 = e$ gegeben - Ausklammern - Lösung direkt ablesen, falls Gleichung in Nullstellenform vorliegt **Lösungsformel für quadratische Gleichungen („Mitternachtsformel“)** Die quadratische Gleichung $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ hat die Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Die quadratische Gleichung $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ hat … - zwei Lösungen, falls $\boldsymbol{b^2-4ac > 0}$ - eine Lösung , falls $\boldsymbol{b^2-4ac = 0}$ - keine Lösung, falls $\boldsymbol{b^2-4ac < 0}$ ist. Den Term (unter der Wurzel) $\boldsymbol{b^2-4ac}$ nennt man <u>Diskriminante D.</u>	$-(x+2)^2-2 = -3 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \lvert x+2\rvert = \sqrt{1} \Rightarrow x_1 = -1 \quad und\ x_2 = -3$ $3x^2-6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0\ und\ x_2 = 2$ $(x+2)(x-4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -2\ und\ x_2 = 4$ $3x^2+18x-21 = 0$ a = 3, b = 18 und c = -21 $D = 18^2 - 4\cdot 3\cdot(-21) = 324+252 > 0 \Rightarrow$ Es gibt zwei Lösungen $x_{1,2} = \frac{-18\pm\sqrt{324+252}}{2\cdot 3} = \frac{-18\pm\sqrt{576}}{6} = \frac{-18\pm 24}{6}$ $\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -7$
Berechnung des Schnittpunkts zweier Funktionsgraphen: 1. Setze die Funktionsterme gleich. 2. Löse nach x auf. Setze die x-Koordinate in eine der Funktionsgleichungen ein.	Bestimme die Schnittpunkt(e): $f(x) = -\frac{1}{2}x^2+3 \qquad g(x) = -3x+5{,}5$ $-\frac{1}{2}x^2+3 = -3x+5{,}5 \qquad \lvert +\frac{1}{2}x^2\ ;$ -3 $0 = \frac{1}{2}x^2-3x+2{,}5$ $\Rightarrow$ „Mitternachtsformel“ liefert: $x_1 = 1 \quad x_2 = 5$ $g(1) = -3\cdot 1+5{,}5 = 2{,}5 \quad S_1(1\lvert 2{,}5)$ $g(5) = -3\cdot 5+5{,}5 = -9{,}5 \quad S_2(5\lvert -9{,}5)$
Extremwertprobleme Vorgehen: 1. Term aufstellen und Definitionsmenge bestimmen. 2. Nebenbedingung formulieren 3. Nebenbedingung in 1. Term einsetzen. Es ergibt sich ein Term mit einer Variablen. 4. Bestimme Koordinaten des Punktes mit maximalen oder minimalen Funktionswert. (Scheitelpunktform) 5. Prüfe, ob das Ergebnis in der Definitionsmenge liegt. 6. Erkläre die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	Für ein Rechteck mit dem Umfang $U = 20\ cm$ sollen die Seitenlängen so bestimmt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.  1. $A(x,y) = x\cdot y \qquad D =]0;10[$ 2. $20\ cm = 2x+2y$ $y = 10-x$ 3. $A(x) = x\cdot(10-x)$ 4. $x\cdot(10-x) = -x^2+10x = -(x^2-10x) = -(x^2-2\cdot 5x+5^2-5^2) =$ $-[(x-5)^2-5^2] = -(x-5)^2+25$ S(5|25) → y = 25 ist maximaler Wert, da Parabel nach unten geöffnet 5. $x = 5$ in D enthalten 6. $x = 5\ cm; A = 25\ cm^2$

Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten 1. Löse eine der Gleichungen nach einer Unbekannten auf	1. Schritt I‘: $c = 4 - b - a$
2. Ersetze mit der aufgelösten Variablen diese Unbekannte in den anderen beiden Gleichungen.	2. Schritt I in II: $4a + 2b + (4 - b - a) = 5{,}5$ $\Rightarrow$ II': $3a + b = 1{,}5$ I in III: $9a + 3b + (4 - b - a) = 6{,}5$ $\Rightarrow$ III': $8a + 2b = 2{,}5$
3. Löse das lineare Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.	3. Schritt II': $b = 1{,}5 - 3a$ II' in III': $8a + 2(1{,}5 - 3a) = 2{,}5$ $\Rightarrow$ $8a - 6a + 3 = 2{,}5$ $2a = -0{,}5$ $a = -\frac{1}{4}$ a in II': $b = 1{,}5 - 3\left(-\frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow b = \frac{3}{4}$
4. Bestimme mit dem Ergebnis von Schritt 3 den Wert der dritten Unbekannten.	4. Schritt a und b in I‘: $c = 4 - \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 4 - \frac{2}{4} = \frac{7}{2}$
Lösbarkeit von Gleichungssystemen - Keine Lösung, falls es eine unerfüllbare Gleichung gibt oder eine solche Gleichung beim Lösen entsteht. - Unendlich viele Lösungen, falls Gleichungen äquivalent sind oder eine Gleichung als Summe von Vielfachen einer anderen Gleichung darstellbar ist	Gleichungssystem mit keiner Lösung: (siehe Gleichung I und II) $\mathrm{I.}\, x + y + z = 4$ $\mathrm{II.}\, 2x + 2y + 2z = 9$ $\mathrm{III.}\, x + y - z = 5$ Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen: $\mathrm{I.}\, x + 2y - z = 0$ $\mathrm{II.}\, 2x + y - z = -1$ $\mathrm{III.}\, 2x + 4y - 2z = 0$ Gleichung III ist Vielfaches von Gleichung I.

III Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

Grundlagen aus vorherigen Jahrgangstufen

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Grundwissen Jgst. 8)

Fakten - Regeln

Verknüpfte Ereignisse

Vereinigungsmenge: $A \cup B$

Schnittmenge: $A \cap B$

Ereignisse sind Teilmengen der Ergebnismenge Ω und können in einem Mengendiagramm dargestellt werden.

Mächtigkeit von Mengen: Anzahl ihrer Elemente

Schreibweise: |A|: Mächtigkeit des Ereignisses A

Gesetze von de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Vierfeldertafeln:

Vierfeldertafel mit Mächtigkeiten (absolute Häufigkeiten)

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$\lvert A \cap B\rvert$	$\lvert \bar{A} \cap B\rvert$	$\lvert B\rvert$
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$\lvert A \cap \bar{B}\rvert$	$\lvert \bar{A} \cap \bar{B}\rvert$	$\lvert \bar{B}\rvert$
	$\lvert A\rvert$	$\lvert \bar{A}\rvert$	Ω

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten (relative Häufigkeiten)

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	$P(\Omega) = 1$

Beispiele

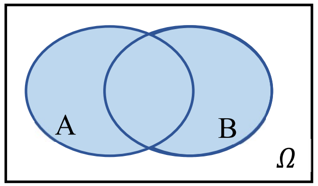
Leni wirft einen Laplace-Würfel einmal und liest die Augensumme ab.

A: „Die Zahl ist gerade.“

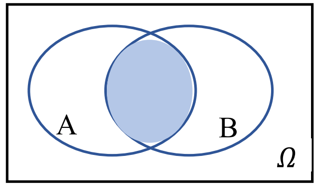
B: „Die Zahl besitzt den Teiler 3.“

A = {2;4;6} |A|= 3 B= {3;6} |B|= 2

$A \cap B = \{6\}$ $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$



$A \cup B$



$A \cap B$

Z: „Schüler besucht die 10. Klasse.“

M: „Schüler ist männlich.“

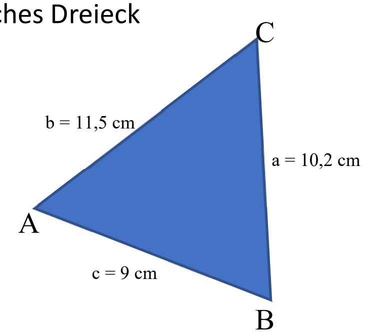
	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{\bar{Z}}$	
$\boldsymbol{M}$	35	180	215
$\boldsymbol{\bar{M}}$	25	260	285
	60	440	500

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{\bar{Z}}$	
$\boldsymbol{M}$	7%	36%	43%
$\boldsymbol{\bar{M}}$	5%	52%	57%
	12%	88%	100% = 1

IV Ähnlichkeit und Strahlensatz

Grundlagen aus vorherigen Jahrgangstufen

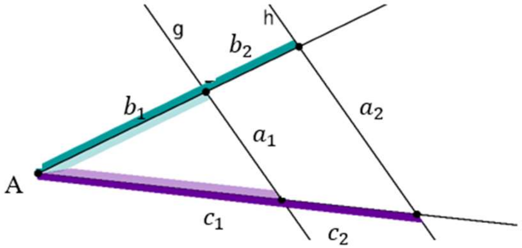
Kongruenz von Dreiecken (Grundwissen Jgst. 7)

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Ähnlichkeit Zwei Figuren F_1 und F_2 sind zueinander ähnlich, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern in zueinander kongruente Figuren überführen kann. Dies ist der Fall, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. Es gibt eine positive Zahl k, sodass jede Strecke von F_2 k-mal so lang ist wie die entsprechende Strecke von F_1. 2. Die beiden Figuren stimmen in allen Winkelmaßen überein. Für ähnliche Dreiecke gilt: Zwei Dreiecke D_1 und D_2 sind dann zueinander ähnlich, wenn <u>eine</u> der beiden oben genannten Bedingungen erfüllt ist. Man schreibt $F_1 \sim F_2$. k heißt <u>Ähnlichkeitsfaktor.</u>	Aus dem gegebenen Dreieck soll ein ähnliches Dreieck konstruiert werden. Ähnlichkeitsfaktor k = 2,5  Neue Seitenlängen: $a = k \cdot a = 2{,}5 \cdot 10{,}2\,cm = 25{,}5\,cm$ $b_{neu} = k \cdot b = 2{,}5 \cdot 11{,}5\,cm$ $= 28{,}75\,cm$ $c_{neu} = k \cdot c = 2{,}5 \cdot 9\,cm = 22{,}5\,cm$
Eigenschaften ähnlicher Figuren: - Entsprechende Winkel sind gleich groß - Entsprechende Strecken haben das gleiche Längenverhältnis <u>Streckenlängen, Flächeninhalt und Rauminhalte bei Ähnlichkeit</u> Jede Streckenlänge in F_2 hat den k-fachen Wert der entsprechenden Streckenlänge in F_1, also $a_2 = k \cdot a_1$ Der Flächeninhalt von F_2 hat den k^2-fachen Wert des Flächeninhalts von F_1, also $A_2 = k^2 \cdot A_1$. Das Volumen von K_2 hat den k^3-fachen Wert des Volumens von K_1, also $V_2 = k^3 \cdot V_1$	Ein Quader Q_1 hat die Maße: l = 2 cm, b = 2 cm und h = 4 cm. Ein dazu ähnlicher Quader Q_2 wurde mit dem Faktor k = 1,5 vergrößert. Bestimme Oberflächeninhalt und Volumen des ähnlichen Quaders. $O_{Q_1} = 4 \cdot (2cm \cdot 4cm) + 2 \cdot (2cm \cdot 2cm) = 40\,cm^2$ $V_{Q_1} = 2cm \cdot 2cm \cdot 4cm = 16\,cm^3$ $O_{Q_2} = 1{,}5^2 \cdot 40\,cm^2 = 90\,cm^2$ $V_{Q_2} = 1{,}5^3 \cdot 16\,cm^3 = 54\,cm^3$

Strahlensatz

V-Figur

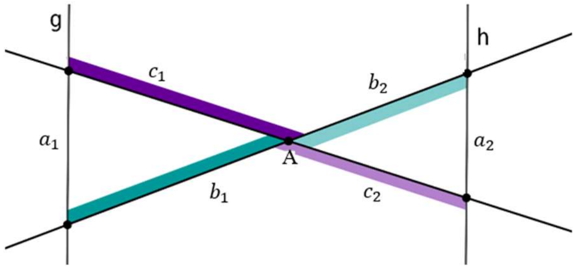
Werden zwei Halbgeraden (Strahlen) mit gemeinsamen Anfangspunkt A von zwei parallelen Geraden, die den Anfangspunkt nicht enthalten, geschnitten, so gilt:



1) Die Längen zweier Abschnitte auf einer Halbgeraden verhalten sich wie die Längen der Abschnitte auf der anderen Halbgeraden.
$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ oder $\frac{b_2 - b_1}{b_1} = \frac{c_2 - c_1}{C_1}$
2) Die Längen der Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die entsprechenden Geradenabschnitte, die in Z beginnen.
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ oder $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}$

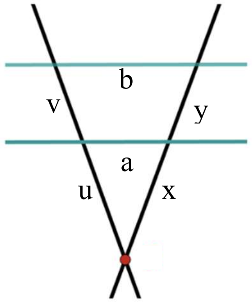
X-Figur

Werden zwei Geraden mit dem Schnittpunkt A von zwei parallelen Geraden geschnitten, die den Schnittpunkt nicht enthalten, so gilt:



1. Die Längen zweier Abschnitte auf der einen Geraden verhalten sich wie die entsprechenden Längen der Abschnitte auf der anderen Geraden.
z.B. $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$
2. Die Längen der Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von A aus gemessenen Längen der Abschnitte auf der einen oder anderen Geraden.
z.B. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ oder $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}$

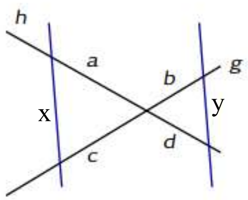
Berechne die Streckenlängen u und b, wenn gilt:
x = 3, y = 1,5, v =2,5 und a = 4.



$\frac{v}{u} = \frac{y}{x} \Rightarrow u = \frac{x \cdot v}{y} = \frac{3 \cdot 2{,}5}{1{,}5} = 5$

$\frac{b}{a} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow b = \frac{(x+y) \cdot a}{x} = \frac{4{,}5 \cdot 4}{3} = 6$

Berechne die Streckenlängen von d und x, wenn gilt:
a = 7,5, b = 4,5, c = 9 und y = 3.



$\frac{b}{c} = \frac{d}{a} \Rightarrow d = \frac{b}{c} \cdot a = \frac{4{,}5}{9} \cdot 7{,}5 = 3{,}75$

$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \Rightarrow x = \frac{c}{b} \cdot y = \frac{9}{4{,}5} \cdot 3 = 6$

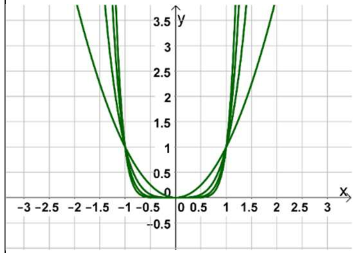
V Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten und Erweiterung des Potenzbegriffs

<table>
<tr><th>Fakten - Regeln</th><th>Beispiele</th></tr>
<tr><td>

Potenzfunktionen

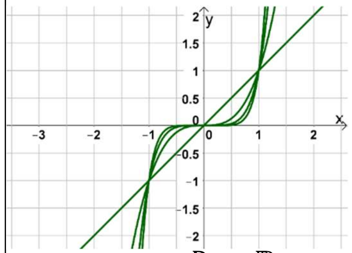
Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^n$ mit $x \in \mathbb{R}\, und\, n \in \mathbb{N}$ nennt man Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.

n gerade und a > 0



$D = \mathbb{R}$
$W = \mathbb{R}_0^+$
achsensymmetrisch zur y-Achse
Gemeinsame Punkte:
(0/0), (1/1), (-1/1)

n ungerade und a > 0



$D = \mathbb{R}$
$W = \mathbb{R}$
punktsymmetrisch zum Ursprung
Gemeinsame Punkte:
(0/0), (1/1), (-1/-1)

Je größer n, desto mehr schmiegt sich G_f für -1<x<1 an die x-Achse an.
Je größer n, um so steiler verläuft G_f für x<-1 bzw. x>1.

Der Faktor a bewirkt eine Streckung in y-Richtung.
Für a>1 wird der Graph größer und steiler.
Für 0<a<1 wird der Graph weiter und flacher.
Für a<0 wird der Graph an der x-Achse gespiegelt. Für a<-1 wird der Graph enger und steiler. Für -1<a<0 wird der Graph weiter und flacher.

</td><td>

$$f(x) = x^4$$

Der Graph von f verläuft im I. und II. Quadranten. Er ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Der Graph von f verläuft für x>1 und für x<-1 steiler als der Graph von x^2. Für -1<x<1 verläuft der Graph von f flacher als der Graph von x^2.

$$g(x) = 2x^3$$

Der Graph von g verläuft steiler als der Graph von x^3. Er ist punktsymmetrisch zum Ursprung und verläuft durch die Quadranten I und III.

$$h(x) = -0{,}5x^3$$

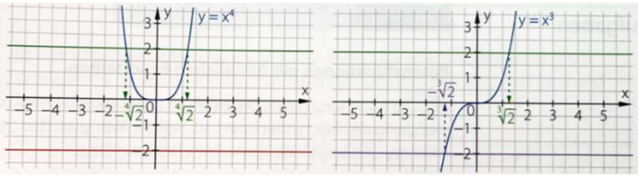
Der Graph von h verläuft durch die Quadranten II und IV. Er ist also fallend. Im Vergleich zum Graphen von x^3 wurde er an der x-Achse gespiegelt. Er ist weiter und flacher als der Graph von x^3.

</td></tr>
<tr><td>

Potenzgleichungen

Gleichungen der Form $x^n = c\ (n \in \mathbb{N}\,, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ werden als Potenzgleichungen bezeichnet.

</td><td>



Quelle: Cornelsen – Fokus Mathematik 9

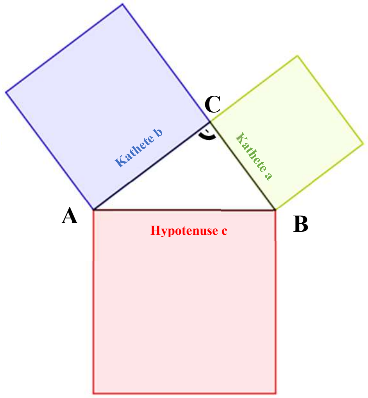
$x^4 = 2$
Zwei Lösungen
$x_1 = \sqrt[4]{2} \quad x_2 = -\sqrt[4]{2}$

$x^3 = 2$
genau eine Lösung
$x = \sqrt[3]{2}$

</td></tr>
</table>

	$x^4 = 0$ Genau eine Lösung x = 0 $x^4 = -2$ Keine Lösung $x^3 = 0$ genau eine Lösung x = 0 $x^3 = -2$ $x = -\sqrt[3]{2}$
Potenzen mit rationalen Exponenten Ist n eine natürliche Zahl und a eine nicht negative Zahl, dann ist $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ *und* $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$, $(p \in \mathbb{Z}, q \in N)$ **Rechengesetze** Gleiche Basis, aber unterschiedliche Exponenten: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $a^r : a^s = a^{r-s}$ Unterschiedliche Basis, aber gle Exponenten: $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $a^r : b^r = (a : b)^r$ Potenz einer Potenz: $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	$7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{6}}$ $7^{\frac{1}{2}} : 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}}$ $23^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = (23 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 46^{\frac{1}{2}}$ $23^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}} = (23 : 2)^{\frac{1}{2}} = 11{,}5^{\frac{1}{2}}$ $2^{\frac{1}{5}^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{15}}$

VI Satz des Pythagoras

Fakten - Regeln	*Beispiele*
<u>Satz des Pythagoras:</u> Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann haben die Quadrate über den Katheten a und b zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse c. Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2$ 	Dreieck ABC mit $a = 2\,cm \quad c = 7\,cm; ges.: \quad b$ $c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $b = \sqrt{(7cm)^2 - (2cm)^2} = \sqrt{49cm^2 - 4cm^2} = \sqrt{45\ cm^2} = \sqrt{9 \cdot 5cm^2} = 3\sqrt{5}\,cm$
<u>Kehrsatz zum Satz des Pythagoras:</u> Wenn in einem Dreieck das Quadrat über einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seitenlängen ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.	Dreieck ABC mit a = 73 cm, b = 48 cm und c = 55 cm Es ist $48^2 + 55^2 = 5329 = 73^2$ Die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$ ist erfüllt. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig und der rechte Winkel liegt bei a.

VII Trigonometrie

Grundlagen aus vorherigen Jahrgangsstufen

Fakten - Regeln	Beispiele

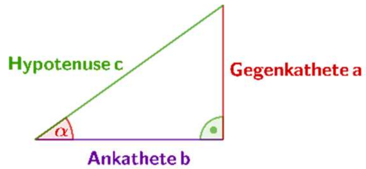
Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:

Sinus, Kosinus &Tangens beschreiben das Verhältnis von Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck in Abhängigkeit von einem spitzen Winkel.

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hyptenuse}$$

$$\cos\propto = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$\tan\propto\ = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$$



Quelle: www.serlo.de

Beispiele:

$\sin 0° = 0 \qquad \sin 90° = 1 \qquad \cos 0° = 1 \qquad \cos 90° = 0$

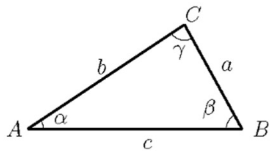
Gegeben im Dreieck: a = 48,0 cm, $\beta = 42°$, $\gamma = 90°$

Gesucht: α, b, c

$\alpha = 180° - 90° - \beta = 180° - 90° - 42° = 48°$

$c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{48{,}0\ cm}{\cos 42°} \approx 64{,}6\ cm$

$b = a \cdot \tan\beta = 48{,}0\ cm \cdot \tan 42° \approx 43{,}2\ cm$



Quelle: Cornelsen – Fokus Mathematik 9

Trigonometrische Beziehungen:

Komplementformeln: $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$

$\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$

Trigonometrischer Pythagoras: $[sin(\alpha)]^2 + [cos(\alpha)]^2 = 1$

Weitere Formel für den Tangens: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Beispiel:

$(\tan\alpha \cdot \cos\alpha)^2 + \sin^2(90° - \alpha)$

$= (\tan\alpha \cdot \cos\alpha)^2 + [\sin(90° - \alpha)\ ]^2$

$= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha$

$= (\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

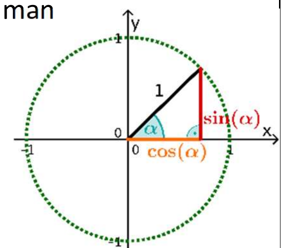
Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Sinus und Kosinus können auch für Winkel zwischen 0° und 360° bestimmt werden.

Trägt man an der x-Achse den Winkel α an, so kann man mithilfe des Einheitskreises (Länge 1) die Werte des Sinus und Kosinus von α ablesen. Die Hypotenuse hat die Länge 1.

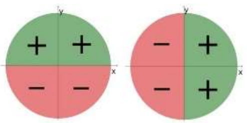
Damit ist:

$$\sin(\alpha) = Gegenkathete$$
$$\cos(\alpha) = Ankathete$$



Quelle: www.serlo.de

Die trigonometrischen Funktionen könenn beim Übergang von einem Quadranten zum nächsten ihr Vorzeichen wechseln.



$\sin\alpha \qquad \cos\alpha$

Quelle: www.serlo.de

Beispiel:

Vorgehen beim Berechnen von Winkeln zu vorgegebenen Sinus- und Kosinuswerten:

1) Am Einheitskreis veranschaulichen
2) Taschenrechner verwenden

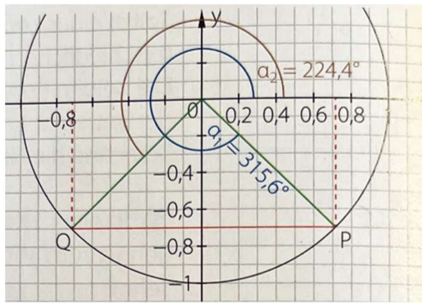
$\sin(\alpha) = -0{,}7$

Mit Taschenrechner: $\alpha = -44{,}4°$

Damit:

$\alpha_1 = 360° - 44{,}4° = 315{,}6°$

$\alpha_2 = 180° + 44{,}4° = 224{,}4°$



Quelle: Cornelsen – Fokus Mathematik 9

Sinus- und Kosinussatz

Sinussatz:

In jedem Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie di Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\mathrm{si}}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Kosinussatz:

In jedem Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Von einem Dreieck ABC sind a = 6 cm; b = 4,5 cm und $\alpha = 62°$ gegeben.
Berechne die Winkel β, γ und die Seite c.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{4{,}5\ cm}{6\ cm} \cdot \sin 62° \Rightarrow \beta \approx 41{,}5°$$

$$\gamma = 180° - 62° - 41{,}5° = 76{,}5°$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{6\ cm \cdot \sin 76{,}5°}{\sin 62°} \approx 6{,}6\ cm$$

Von einem Dreieck ABC sind a = 6 cm, b = 7 cm und c = 4 cm gegeben.
Berechne den Winkel α.

$$\cos\propto = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16\ cm^2 + 49\ cm^2 - 36\ cm^2}{2 \cdot 7\ cm \cdot 4\ cm} = \frac{29}{56}$$

➔ $\alpha \approx 58{,}8°$