I EXPONENTIELLES WACHSTUM UND LOGARITHMUS

Fakten – Regeln | *Beispiele*

Exponentielles Wachstum

Bei exponentiellem Wachstum wächst der Bestand pro Einheit mit einem konstanten Wachstumsfaktor a.

Nach x Einheiten hat sich der Anfangswert b x-mal „ver-a-facht“.

Wachstumsgleichung: $f(x) = b \cdot a^x$

$a > 1$ exponentielle Zunahme

$0 < a < 1$ exponentielle Abnahme

+1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
f(x)	4	10	25	62,5	156,25

·2,5 ·2,5 ·2,5

Wachstumsfaktor $a = \frac{f(x)}{f(x-1)} = 2{,}5$; Wachstumsgleichung: $f(x) = 4 \cdot 2{,}5^x$

Halbwertszeit, Verdopplungszeit:

Bei Aufgaben, die rund um Verdopplungszeit oder Halbwertszeit sind folgende Funktionsterm-Varianten der allgemeinen Exponentialfunktion hilfreich:

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$ (T: Halbwertszeit)

$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_v}}$ (t_v: Verdopplungszeit)

Die Halbwertszeit von Cäsium 137 beträgt 30 Jahre. Berechnen Sie, wie groß der Anteil noch nicht zerfallener Atomkerne nach 75 Jahren ist.

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{30}}$ $\quad$ (N_0: Anfangsbestand; t: Zeit in Jahren)

$N(75) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{75}{30}} = N_0 \cdot 0{,}5^{2{,}5} \approx N_0 \cdot 0{,}1768$

➔ Nach 75 Jahren sind circa 17,68% der Cäsium 137 Atomkerne noch nicht zerfallen.

Allgemeine Exponentialfunktion

Funktionen der Form

$x \mapsto b \cdot a^x \qquad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ mit $D = \mathbb{R}$

heißen allgemeine Exponentialfunktionen.

Ihre Graphen schneiden die y-Achse im Punkt (0/b).

Für den Wachstumsfaktor a gilt (wenn b > 0):

$a > 1$ Der Graph ist monoton steigend

$0 < a < 1$ Der Graph ist monoton fallend

Die x-Achse ist für alle (allgemeinen) Exponentialfunktionen eine waagrechte Asymptote. Für b > 0 verläuft der Graph der allgemeinen Exponentialfunktion oberhalb der x-Achse. Für b < 0 verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.

$f(x) = 2 \cdot 3^x$: SP mit y-Achse (0/2);

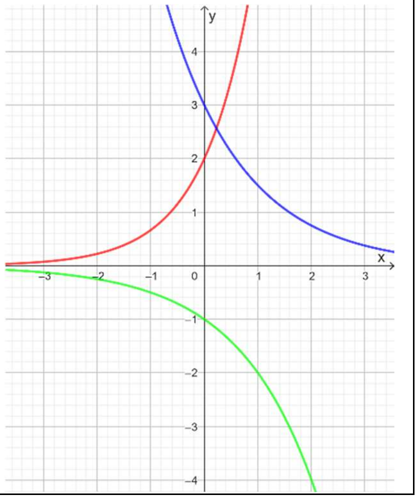
$a = 3 > 1 \rightarrow G_f$ ist monoton steigend

$g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$: SP mit y-Achse (0/3);

$0 < a = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow G_g$ ist monoton fallend

$h(x) = -1 \cdot 2^x$: SP mit y-Achse (0/-1);

$b < 0 \rightarrow G_h$ verläuft unterhalb der x-Achse



Logarithmus

Der Logarithmus einer positiven Zahl u zur positiven Basis b (also: $\log_b(u)$) ist die Zahl x, mit der b potenziert werden muss, um u zu erhalten. Für $b, u \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$ gilt:

$$b^x = u \quad \Leftrightarrow \quad \log_b(u) = x$$

Das Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens.

Der Logarithmus zur Basis 10 kann mit lg abgekürzt werden.

Es gilt: $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

Exponentialgleichungen

Gleichungen, in denen die Variable im Exponenten auftritt, nennt man Exponentialgleichung.

Lösen von Exponentialgleichungen:

Durch die Anwendung der Potenzgesetze und Äquivalenzumformungen soll die Gleichung in die Form $a = b^x$ gebracht werden.

$x = \log_b(y)$ ist dann die Lösung der Gleichung, wenn y > 0.

Alternative Lösungswege: Beidseitiges Logarithmieren, Exponentenvergleich, (Substitution)

$$\log_3(81) = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81; \quad \log_c\left(\frac{1}{c^4}\right) = -4; \ \log_c(\sqrt[3]{c}) = \log_c\left(c^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}$$

Wichtige Logarithmen ($a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$) :

$$\log_a(a) = 1; \ \log_a(a^c) = c; \ \log_a(1) = 0; \ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

$$\lg(0{,}01) = \log_{10}(0{,}01) = -2; \lg(10000) = \log_{10}(10000) = 4$$

Lösen Sie die Exponentialgleichung $0{,}25 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 4^{0{,}5x-3}$.

„Standardlösung“	„Exponentenvergleich“
$0{,}25 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 4^{0{,}5x-3}$	$0{,}25 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 4^{0{,}5x-3}$
$0{,}25 \cdot (2^2)^x = 8 \cdot 4^{0{,}5x} \cdot 4^{-3}$	$2^{-2} \cdot 2^{2x} = 2^3 \cdot (2^2)^{0{,}5x-3}$
$0{,}25 \cdot 4^x = \frac{1}{8} \cdot (4^{0{,}5})^x$	$2^{2x-2} = 2^3 \cdot 2^{2\cdot(0{,}5x-3)}$
$0{,}25 \cdot 4^x = \frac{1}{8} \cdot 2^x \qquad \vert : 2^x; : 0{,}25$	$2^{2x-2} = 2^3 \cdot 2^{x-6}$
$\frac{4^x}{2^x} = \frac{\frac{1}{8}}{0{,}25}$	$2^{2x-2} = 2^{x-3}$
$\left(\frac{4}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$	Exponentenvergleich liefert:
$2^x = \frac{1}{2}$	$2x - 2 = x - 3 \qquad \vert -x; \ +2$
$x = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$x = -1$

Lösungsmenge $L = \{-1\}$

II ZUSAMMENGESETZTE ZUFALLSEXPERIMENTE

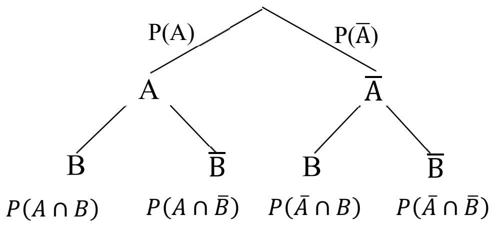
Fakten - Regeln

Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Zusammengesetzte (mehrstufige) Zufallsexperimente sind Experimente mit einem zufälligen/nicht vorhersagbaren Ergebnis, das in mehreren Durchgängen ausgeführt wird.

Knotenregel: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen eines Baumdiagramms, die von einem Knoten ausgehen, ist 1.

Pfadregeln



1. Pfadregel 1

Die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis (vgl. GW8) erhält man, indem man die Einzelwahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1.

2. Pfadregel

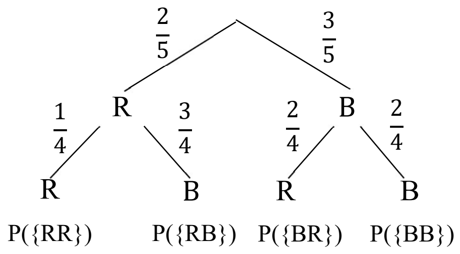
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis (vgl. GW 8) erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zu dem Ereignis gehörenden Elementarereignisse addiert.

Zufallsexperimente simulieren

Unterschiedliche Zufallsexperimente können häufig durch das Würfen eines Würfels, das Drehen eines Glücksrads oder das Ziehen von Kugeln aus einer Urne nachgestellt werden.
Bei einer großen Anzahl an Durchführungen von Zufallsexperimenten kann man Tabellenkalkulationsprogramme nutzen, indem man Zufallszahlen erzeugt.

Beispiele

In einer Urne befinden sich 2 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



Ergebnismenge $\Omega = \{RR; RB; BR; BB\}$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

$P(\{RR\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 10\%$ (Anwenden der Produktregel)

$P(\{RB\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} = 30\%$

$P(\{BR\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 30\%$

$P(\{BB\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 30\%$

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:“Genau eine blaue Kugel wird gezogen.“

$A = \{RB; BR\}$

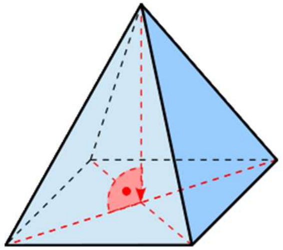
$P(A) = P(\{RB\}) + P(\{BR\}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 60\%$ (Anwenden der 1. Pfadregel)

III PYRAMIDE UND KEGEL

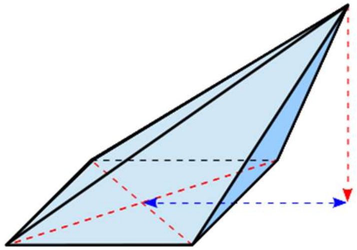
Fakten - Regeln

Pyramide:

Eine Pyramide ist ein Körper mit einem n-Eck als Grundfläche G und n Dreiecken als Seitenflächen, die die Spitze der Pyramide als gemeinsamen Punkt besitzen. Die Seitenflächen bilden zusammen die Mantelfläche M.



gerade Pyramide

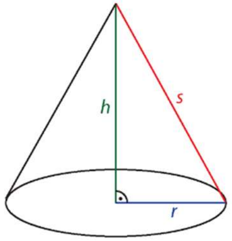


schiefe Pyramide

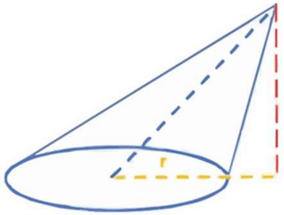
Volumen und Oberflächeninhalt einer Pyramide:

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h; \qquad O_{Pyramide} = G + M$

Kegel:



gerader Kegel



schiefer Kegel

Ein Kegel ist ein Körper mit einem Kreis als Grundfläche und einer gekrümmten Mantelfläche mit einer Spitze. Die Höhe eines Kegels ist der Abstand der Spitze zur Grundfläche.

Das Netz eines Kegels besteht aus einem Kreis (Grundfläche) und einem Kreissektor (Mantelfläche).

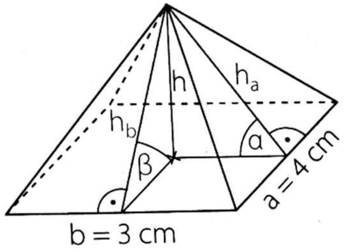
Volumen und Oberflächeninhalt eines Kegels:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$

$O_{Kegel} = G + M = r^2\pi + r \cdot \pi \cdot s$

Beispiele

Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der nebenstehenden Pyramide, wenn gilt: h=2cm.



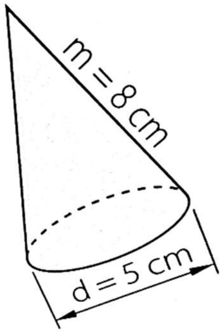
$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4cm \cdot 3cm \cdot 2cm = 8cm^2$

$h_a = \sqrt{(2cm)^2 + (1{,}5cm)^2} = 2{,}5cm$

$h_b = \sqrt{(2cm)^2 + (2cm)^2} = 2\sqrt{2}cm$

$O_{Pyramide} = G_{Pyramide} + M_{Pyramide} = a \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = 3cm \cdot 4cm + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot 2{,}5cm + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3cm \cdot 2\sqrt{2}cm = 22cm^2 + 6\sqrt{2}cm^2 \approx 30{,}49cm^2$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen des nebenstehenden geraden Kegels.



$h_{Kegel} = \sqrt{(8cm)^2 - (2{,}5cm)^2} = \frac{\sqrt{231}}{2} cm$

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (2{,}5cm)^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{231}}{2} cm = \frac{25\sqrt{231}}{24} \pi cm^3 \approx 49{,}7cm^3$

$O_{Kegel} = G + M = r^2\pi + r \cdot \pi \cdot m = (2{,}5cm)^2 \cdot \pi + 2{,}5cm \cdot \pi \cdot 8cm = 6{,}25\pi cm^2 + 20\pi cm^2 = 26{,}25\pi cm^2 \ (\approx 82{,}47cm^2)$

Wichtiger Zusammenhang bei Kegeln:

$h^2 + r^2 = m^2$ (Satz des Pythagoras)

➔ $h = \sqrt{m^2 - r^2}$

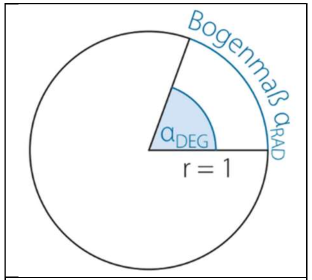
IV SINUS – UND KOSINUSFUNKTION

Fakten - Regeln

Bogenmaß:
Ein Winkel im Gradmaß α_{DEG} kann immer auch im Bogenmaß α_{RAD} ange-geben werden. Es gilt:

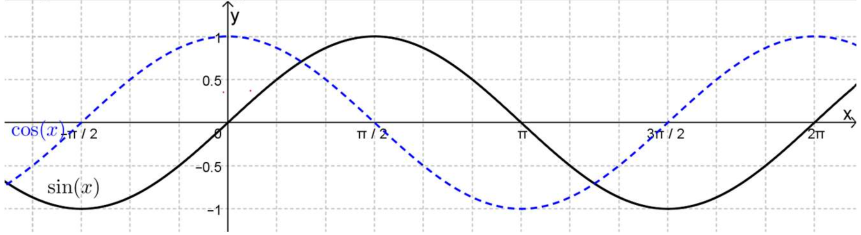
$$\frac{\alpha_{RAD}}{2\pi} = \frac{\alpha_{DEG}}{360°}$$

Das Bogenmaß α_{RAD} eines Winkels α_{DEG} ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.



Quelle: Cornelsen, Fokus Mathematik 10 S. 124

Sinus – und Kosinusfunktion:
Die Funktionen $x \longmapsto \sin(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \longmapsto \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ ordnen jedem Winkel x im Bogenmaß den entsprechenden Sinus- bzw. Kosinuswert zu.



Allgemeine Sinusfunktion:

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d} \quad ; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ;$$

a: streckt in y-Richtung mit dem Faktor $\underbrace{|a|}_{\text{„Amplitude"}}$

$a < 0 \Rightarrow$ zusätzliche Spiegelung an x-Achse

b: streckt in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$

$b < 0 \Rightarrow$ zusätzliche Spiegelung an y-Achse

Die Periodenlänge p der Funktion ist: $p = \frac{2\pi}{|b|}$

c: verschiebt in
- pos. x - Richtung für $c < 0$ um $|c|$
- neg. x - Richtung für $c > 0$ um c

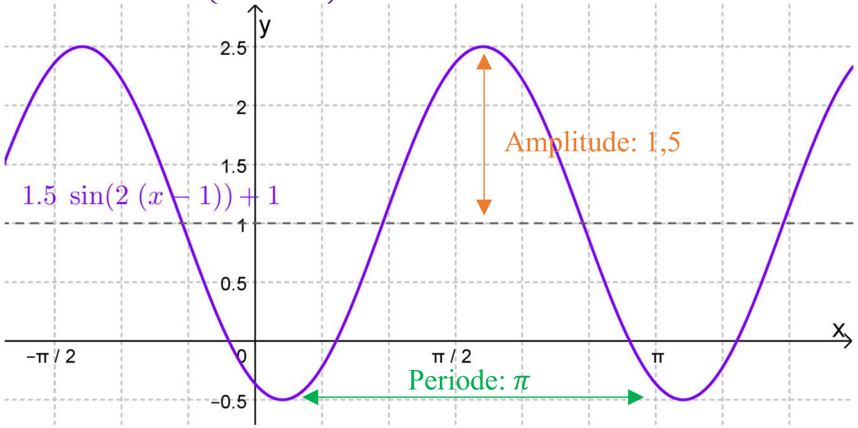
Beispiele

$$\alpha_{DEG} = 60° \Rightarrow \alpha_{RAD} = \frac{\alpha_{DEG}}{360°} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Wichtige Werte:

Gradmaß α_{DEG}	0°	30°	45°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß α_{RAD}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

$$h(x) = 1{,}5 \cdot \sin\big(2(x - 1)\big) + 1$$



Funktion:	**Veränderung im Funktionsgraphen:**
$g(x) = 2(x - 3)^2 + 4$ ⇑ *(die Scheitelpunktform)*	Der Graph der Funktion $g(x) = x^2$ wird • um den Faktor **2** in y-Richtung gestreckt • um 4 in pos. y-Richtung verschoben (Umgangsspr.: nach oben) • um 3 in pos. x-Richtung verschoben (Umgangsspr.: nach rechts)

$\boldsymbol{d}$: verschiebt in pos. y - Richtung für $\boldsymbol{d > 0}$ um $\boldsymbol{d}$ neg. y - Richtung für $\boldsymbol{d < 0}$ um $\boldsymbol{\lvert d \rvert}$ **Reihenfolge:** Erst strecken, dann verschieben. Dabei ist es egal ob erst x-Richtung (also b vor c) oder y-Richtung (also a vor d) berücksichtigt werden. **Bemerkung:** Andere Graphen (z.B.: $f(x) = x^4$; $f(x) = cos(x)$; $g(x) = 2^x$; $h(x) = \sqrt{x}$ usw.) können ebenso geändert werden.	$\boldsymbol{h(x) = -\frac{1}{3} \cdot 2^x + 4}$ $\boldsymbol{k(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi) - 3}$	Der Graph der Funktion $\boldsymbol{h(x)} = 2^x$ wird • an der x-Achse gespiegelt • um den Faktor $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ in y-Richtung gestreckt (umgangssprachlich: gestaucht) • um 4 in die pos. y-Richtung verschoben $\boldsymbol{k(x) = \frac{1}{2}\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 3}$ Der Graph der Funktion $\boldsymbol{k(x) = \cos(x)}$ wird • um den Faktor $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ in y-Richtung gestreckt • um 3 in neg. y-Richtung verschoben • um den Faktor $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ in x-Richtung gestreckt (umgangssprachlich: gestaucht) • um $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ in neg. x-Richtung verschoben (umgangssprachlich: nach links)

VI KUGELN

Fakten - Regeln

Oberfläche einer Kugel:

$$O_{Kugel} = 4r^2\pi$$

Die Oberfläche einer Kugel lässt sich nicht in eine Ebene abwickeln. Somit haben Kugeln keine Netze.

Volumen einer Kugel:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}r^3\pi$$

Die Formel für das Volumen einer Kugel lässt sich mit dem Prinzip von Cavalieri herleiten.

Prizip von Cavalieri:
Das Volumen zweier Körper ist gleich groß, wenn beide Körper...
1. den gleichen Grundflächeninhalt
2. die gleiche Höhe und
3. in jeder beliebigen Höhe gleich große Querschnittsflächen besitzen.

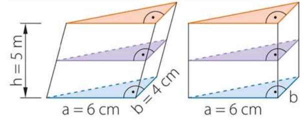
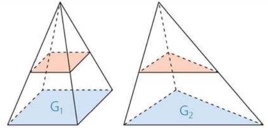
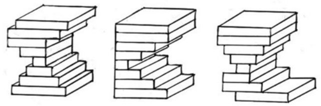
Beispiele

Berechnen Sie die Masse einer kugelförmigen Holzkugel ($\rho = 690\,\frac{kg}{m^3}$), die einen Oberflächeninhalt von $10\ dm^2$ besitzt.

$$O_{Kugel} = 4r^2\pi \Rightarrow \frac{O_{Kugel}}{4\pi} = r^2 \overset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{\frac{O_{Kugel}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{10\ dm^2}{4\pi}} \approx 0{,}892\ dm$$

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{10\ dm^2}{4\pi}}^3 \cdot \pi = 2{,}97\ldots\ dm^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 690\frac{g}{dm^3} \cdot 2{,}97\ldots\ dm^3 = 2051{,}7\ldots g \approx \underline{\underline{2{,}05\ kg}}$$

Beispiel 1:	**Beispiel 2:**	**Beispiel 3:**
		
Quelle: Cornelsen, Fokus Mathematik 10 S. 172		*Quelle: raschweb.de*

V GANZRATIONALE FUNKTIONEN

Fakten - Regeln	*Beispiele*
Ganzrationale Funktion: Der Term $a_nx^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und den Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ heißt Polynom n-ten Grades, wenn für dessen Leitkoeffizient a_n gilt: $a_n \neq 0$. Eine Funktion, deren Term ein Polynom vom Grad n ist, heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades. Ihre Definitionsmenge ist ℝ.	$f(x) = -5x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 6$ ist eine ganzrat. Funktion vom Grad 4. $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \pi$ ist eine ganzrat. Funktion vom Grad 3. $h(x) = x \cdot \frac{3}{5}x^2 - x^2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 2x^2 + \sqrt{2} = \frac{2}{3}x^5 - \frac{3}{5}x^3 + \sqrt{2}$ ist eine ganzrat. Funktion vom Grad 5.
Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs Bei einer ganzrat. Funtion mit $f(x) = a_nx^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ bestimmt allein der Summand a_nx^n das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, also für betragsmäßig sehr große x-Werte.	Der Graph von f verläuft für betragsmäßig große Zahlen ähnlich wie der Graph der Funktion $f_1(x) = -5x^4$ von links unten nach rechts unten.(vgl. Grundw. m9) Der Graph von g verläuft für betragsmäßig große Zahlen ähnlich wie der Graph der Funktion $g_1(x) = \frac{2}{3}x^3$ von links unten nach rechts oben. (vgl. Grundw. m9)
Symmetrie von Funktiongraphen: Wenn gilt: $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$ der Graph G_f der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Nur gerade Funktionen (ganzrat. Funktion mit nur geraden Expoenten und 0) sind achsensymmetrisch zur y-Achse. $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow$ der Graph G_f der Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Nur ungerade Funktionen (ganzrat. Funktion mit nur ungeraden Expoenten) sind punktsymmetrisch zum Ursprung.	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Graphen folgender Funktionen: $\mathrm{f(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\,;\ g(x) = 3x^2 - \cos\,(x)\,;\ h(x) = 3x^4 - 2x \cdot 3x^2 + 8}$ $f(-x) = 2 \cdot (-x) \cdot \sqrt{(-x)^2 + 3} = -2x \cdot \sqrt{x^2 + 3} = -f(x) \Leftrightarrow G_f$ *ist punktsymmetrisch zum Ursprung.* $g(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - cos(-x) = 3x^2 - cos(x) = g(x) \Leftrightarrow G_g$ *ist achsensymmetrisch zur y-Achse.* G_h *ist nicht symmetrisch zur y-Achse bzw. zum Ursprung, da in* $h(x) = 3x^4 - 6x^3 + 8$ *gerade wie auch ungerade Potenzen von* x *vorkommen.* *ODER:* $h(-x) = 3 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^3 + 8 = 3x^4 + 6x^3 + 8 \neq h(x)$ *und* $h(-x) = \cdots \neq -h(x)$
Nullstellen: Die Nullstellen einer ganzrat. Funkt. können aus der faktorisierten Form direkt abgelesen werden. Hat eine Nullstelle gerade Vielfachheit, so berührt der Graph die x-Achse. Hat sie hingegen ungerade Vielfachheit, so wechselt der Graph die Seite der x-Achse (VZW: die Funktionswerte wechseln das Vorzeichen). Je größer die Vielfachheit einer Nullstelle, desto flacher verläuft der Funktionsgraph in der Nähe der Nullstelle. Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat maximal n Nullstellen (inkl. Vielfachheiten). Berechnung der Nullstellen: Ausklammern, MNF bzw. p-q-Formel, Substitution	$f(x) = (x-2)^3; h(x) = (x-2)^6; g(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ $x = 2$ ist dreifache Nullstelle ⇒ mit VZW $x = 2$ ist sechsfache Nullstelle ⇒ ohne VZW $x = -0{,}5$ ist vierfache Nullstelle ⇒ ohne VZW